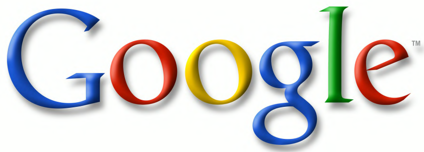
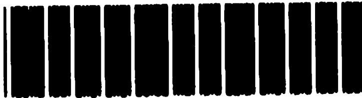








LEÇONS

SUR LA

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR.

Paris.—Imprimerie de MALLET-BACHELIER, 10, rue de Seine-Saint-Germain, près l'Institut.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR,

PAR G. LAMÉ.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1861.

cules pondérables, sont comparables aux longueurs d'ondulation de la lumière. La théorie de l'élasticité, dépouillée des anciennes idées, peut donc découvrir plusieurs des lois qui régissent les actions moléculaires, et donner des indications précises sur la constitution intérieure des milieux pondérables.

Et, la Théorie analytique de la Chaleur, purifiée de la même manière, s'appuyant aussi sur les faits, conduit à des conséquences, non moins importantes, sur la disposition des particules, et sur les variations de la conductibilité, dans les milieux solides. Conséquences, qui conduisent à l'explication physique, des formes primitives et secondaires des cristaux naturels, de leurs facettes et de leurs troncatures. Conséquences, qui indiquent la cause de l'électrisation par la chaleur de certains cristaux, et des anomalies que présentent leurs formes naturelles.

Lorsqu'une branche de la Physique mathématique, est ainsi parvenue à écarter, tout principe douteux, toute hypothèse restrictive, elle entre réellement dans une phase nouvelle. Et cette phase paraît définitive, car la série historique, et en même temps rationnelle, des progrès accomplis, signale une tendance constante vers l'indépendance de toute loi préconçue.

En effet, pour ces diverses branches, la marche uniforme est celle-ci. On se propose de reconnaître les lois qui régissent, à l'intérieur d'un milieu solide homogène, une ou plusieurs fonctions de trois coordonnées, seules variables dans l'état statique, et du temps, quatrième variable lors de l'état dynamique. On constate, d'abord, que ces fonctions peuvent être

considérées comme étant continues, lors même qu'elles n'auraient de valeurs que pour les particules, similaires et solides, disséminées dans le milieu. Car on peut évidemment leur substituer les fonctions interpolaires qui reproduiraient toutes ces valeurs supposées connues : puisque, dans les sommations, ces fonctions, de même espèce que le potentiel de Gauss, seront toujours accompagnées de facteurs analogues à la masse; ce qui éloignera l'influence des points géométriques, pour lesquels ces facteurs seront nuls.

Ensuite, le phénomène qu'on en a vue, devant dépendre des variations des fonctions continues introduites, on peut limiter la première étude, ou la première approximation, aux premiers termes de ces variations, ou à ceux qui s'expriment à l'aide des dérivées des deux premiers ordres. Laissant de côté les termes plus éloignés, et moins influents, pour les évoquer, quand il s'agira d'expliquer les faibles écarts des lois qu'on aura pu trouver.

Cela posé, il faut chercher comment les dérivées, seules conservées, peuvent dépendre de la cause spécifique du phénomène; par exemple, ou de l'élasticité, ou de la conductibilité. Alors, afin de franchir un premier pas, on simplifie d'abord les données, en considérant exclusivement les milieux solides d'une homogénéité telle, que la cause efficiente agisse avec la même intensité à même distance, sur toutes les directions autour d'un même point; c'est-à-dire, ou que l'élasticité, ou que la conductibilité, soit constante pour toutes les orientations.

Mais, la loi de cette action n'étant que partiellement

indiquée par certains faits particuliers, on la complète par une hypothèse additionnelle. De là résulte un principe, qui n'est que probable, et d'où l'on déduit, enfin, un système d'équations aux différences partielles, pour répondre à la question posée. Ces équations expriment, dans l'hypothèse adoptée, la loi différentielle qui régit les fonctions cherchées, à l'intérieur des milieux solides, d'une homogénéité particulière, il est vrai, mais qui peut se rencontrer dans les corps non cristallins.

Ayant obtenu cette première expression, quelque peu incertaine, on procède à la recherche de la loi intégrale, pour des corps de formes données, placés dans des circonstances connues et réalisables; afin de pouvoir rapprocher les nombres, ainsi calculés, de ceux que donnera directement l'expérience ou l'observation; et de pouvoir déduire, de leur coïncidence ou de leur écart, la vérification ou le rejet du principe admis. Abstraction faite de son principal but, ce genre de recherche a pour résultat, de familiariser le géomètre, avec les difficultés que présentera, dans le cas général, la détermination des constantes introduites par l'intégration, et de lui faire découvrir la forme précise, ou même naturelle, des fonctions inconnues.

Après cette première exploration, on revient au point de départ, pour tâcher d'étendre la théorie inaugurée, au cas d'une homogénéité plus générale du milieu solide, ou telle, que la cause efficiente du phénomène soit changeante avec la direction autour d'un même point. Mais, la loi de ce changement n'étant aussi qu'imparfaitement indiquée par les faits, on la complète pareillement à l'aide d'une seconde hypo-

thèse. De là résulte un autre principe, qui n'est encore que probable, et qui conduit à un nouveau système d'équations linéaires aux différences partielles, plus compliqué, mais plus général que le premier.

Or, si l'on examine, avec soin, en quoi consiste la complication apportée par cette plus grande généralité, quels sont les nouveaux termes, les nouveaux coefficients, qui apparaissent dans les équations aux différences partielles, à mesure que l'on écarte successivement diverses restrictions; on conçoit que l'on puisse conclure, d'un pareil examen, la forme que devront avoir, essentiellement, les équations générales, lorsqu'on aura banni toute hypothèse, toute idée préconçue, toute restriction relative à l'homogénéité. Et la réussite de cette dernière recherche, sera l'avénement de la phase définitive que j'ai indiquée. On reconnaîtra les diverses étapes de cette marche générale et progressive, dans l'esquisse historique que je vais tracer, des deux branches principales de la Physique mathématique.

Le travail primitif de Navier sur l'élasticité, et celui qui m'est commun avec Clapeyron, ne considèrent que le cas de l'élasticité constante, sur toutes les directions autour d'un même point. Le principe admis est celui-ci : Deux molécules d'un milieu solide, très-voisines et relativement déplacées, exercent l'une sur l'autre une action mutuelle, dirigée suivant la ligne qui les joint, et égale au produit de leur écartement, par un facteur, qui varie avec la distance des molécules, et qui devient insensible quand cette distance est appréciable.

Poisson et Cauchy, par de magnifiques travaux, ont traité le cas, plus général, où l'élasticité change avec la direction autour d'un même point. Le second principe adopté diffère du premier, en ce que le facteur, qui multiplie l'écartement, dépend à la fois, et de la distance, et des angles qui assignent sa direction; ce facteur ayant toutefois la même valeur pour deux directions opposées l'une à l'autre.

Ce principe, qui devait paraître extrêmement probable, ou presque certain, aux illustres géomètres qui l'ont complété, est devenu très-douteux, depuis que d'habiles physiciens ont signalé les écarts qui existent entre les nombres calculés par la théorie, et ceux que donne l'expérience directe. D'ailleurs, quand on examine à fond ce principe, comme je l'ai fait dans un Cours récemment publié, toutes ses parties paraissent effectivement très-incertaines; chaque mot de son énoncé donne lieu à un doute, déguise une hypothèse restrictive, ou présuppose une loi. La théorie mathématique de l'élasticité ne peut donc continuer à faire usage de ce principe, sans cesser d'être rigoureuse et certaine.

Mais, circonstance remarquable, il est très-facile d'en écarter à la fois toute la partie douteuse : car un simple renversement de l'ordre des matières traitées, lors de l'exposition de la théorie, rend ses lois incontestables. En effet, dans l'étude mathématique de l'élasticité, les fonctions à déterminer sont de deux espèces, les projections du déplacement moléculaire, et les composantes des forces élastiques. Les forces ayant pour cause originelle les déplacements relatifs, il avait paru

naturel de partir de ces déplacements, et d'en déduire les forces, en adoptant l'hypothèse de l'attraction, ou de la répulsion à distance, des molécules relativement déplacées.

Aujourd'hui, puisqu'il est reconnu, d'après Cauchy, que toutes les lois qui régissent les forces élastiques se déduisent rationnellement des théorèmes généraux de la Mécanique, c'est par établir ces lois qu'il convient de commencer. Puis, il ne faut chercher, qu'après leur établissement, comment les forces peuvent, ou doivent, s'exprimer à l'aide des dérivées des déplacements, sans présupposer aucune loi sur les actions moléculaires, sans faire aucune restriction relative à l'homogénéité. Or, Poisson a déduit ces expressions générales, et certaines, à l'aide de la Mécanique rationnelle. Leurs coefficients sont très-nombreux, il est vrai, mais pour connaître leurs relations naturelles, l'analyse mathématique seule est impuissante; il faut essentiellement interroger les faits, soit la double réfraction, soit toute autre classe de phénomènes.

Il faut le reconnaître : élevés à l'école de Laplace, ni Poisson, ni Cauchy, ne devaient penser qu'il fût possible d'établir une théorie de Physique mathématique, sans présupposer aucune loi. Mais, doués d'une puissance et d'une fécondité qui n'appartiennent qu'aux génies, en remuant, pour ainsi dire de fond en comble, le sujet qu'ils avaient adopté, ils ne pouvaient manquer de rencontrer les formules pures de toute hypothèse, puisqu'elles existaient. Et peut-être nous fallait-il le concours et l'autorité de ces deux grands

géomètres, pour amener au jour un tel résultat, si contraire aux idées reçues.

En ce qui concerne le cas de l'élasticité constante, qui intéresse particulièrement la pratique industrielle, j'ai fait voir, dans le Cours déjà cité, qu'en modifiant convenablement la démonstration des deux lemmes, dont je me suis servi dans les *Leçons sur l'Élasticité*, on déduisait, rigoureusement, les formules qui se rapportent à ce cas, des expressions, générales et certaines, données par Poisson. Et ces formules, dont l'établissement est aujourd'hui complétement dégagé de toute hypothèse, de toute idée préconçue sur les actions moléculaires, contiennent, essentiellement, deux coefficients distincts, dont le rapport peut différer d'un solide à un autre, au lieu de l'unique coefficient déduit forcément de l'ancien principe. Circonstance fort heureuse, en ce qu'elle écarte, complétement, les objections qui résultaient des expériences de M. Wertheim et d'autres physiciens.

Passons à l'historique de la seconde branche.

Le travail primitif de Fourier, sur la théorie analytique de la chaleur, ne considère que le cas de la conductibilité constante, autour d'un même point du milieu solide homogène. Le principe admis conduit à ce corollaire, que le flux de chaleur, qui traverse un élément plan, ne contient que la variation, normale à cet élément, de la fonction cherchée, laquelle n'est autre que la température. Ce corollaire établit rapidement, l'équation aux différences partielles du second ordre qui règne à l'intérieur du corps, et celle aux différences partielles du premier ordre qui appartient

à la surface. Et telles sont les lois différentielles qui régissent la fonction.

La recherche des lois intégrales, pour des corps de formes données, placés dans des circonstances calorifiques réalisables, a permis de comparer les nombres calculés par la théorie, avec ceux déduits de l'observation; et leur coïncidence, dans le cas très-connu de la barre, a vérifié le principe admis. Fourier et Poisson, ont intégré complétement les équations générales, pour le prisme rectangulaire, et pour le cylindre droit. Laplace a résolu le cas de la sphère. Je suis parvenu à traiter l'ellipsoïde, et tous les corps cylindriques limités par des surfaces isothermes.

Le résultat principal de ces diverses solutions, consiste dans la forme, toujours reproduite, de la fonction intégrale, laquelle s'exprime par une série de *termes simples*, vérifiant chacun séparément toutes les conditions, différentielles ou autres, moins une; et qui ont chacun un coefficient facteur, d'abord arbitraire, que l'on parvient à déterminer, à l'aide de la dernière condition, par une méthode d'élimination, présentant constamment les mêmes caractères.

Ainsi, la fonction cherchée est toujours exprimée par une série de termes simples, desquels chacun pourrait exister seul, si la condition finale le permettait. Cette forme, que l'on peut trouver compliquée, et en quelque sorte imparfaite, au point de vue purement analytique, est, en réalité, la forme naturelle de toutes les fonctions que les mathématiques appliquées se proposent de déterminer. Elle existait déjà dans la mécanique céleste; elle domine maintenant dans la théorie analytique de la chaleur; enfin, en résolvant le

problème de l'équilibre intérieur d'une enveloppe sphérique, je l'ai signalée dans la théorie mathématique de l'élasticité.

Mais, sa première apparition, sa définition la plus lucide, et en même temps la plus complète, appartient à la théorie des vibrations sonores. Là, chaque terme simple est un *son* bien nettement défini; la série totale indique la coexistence de tous les sons que le corps peut produire; les coefficients-facteurs, isolément déterminés par la méthode générale d'élimination, donnent les intensités respectives de ces divers sons; et si la condition finale le permet, il pourra n'exister qu'un coefficient, c'est-à-dire que le corps pourra ne produire qu'un son unique.

Il fallait que cette généralité de forme, des fonctions naturelles, fût bien vraie, bien essentielle, pour être principalement signalée à l'attention des géomètres, par la théorie analytique de la chaleur, dans son premier état, encore si incomplet. Comme je l'ai dit, Fourier et Poisson ont traité le prisme rectangulaire, placé dans toutes les circonstances calorifiques imaginables. Ostrogradski a résolu les mêmes problèmes, pour le prisme droit dont la base est un triangle rectangle isocèle. Je suis parvenu à traiter le prisme triangulaire régulier, sa moitié, et deux tétraèdres irréguliers provenant de la subdivision du cube. Puis j'ai démontré que c'étaient là les seuls polyèdres, pour lesquels on pouvait exprimer la loi intégrale de la fonction cherchée, ou de la température, par des séries dites périodiques, ou sous la forme des solutions précédentes.

J'avoue, ici, que cette conclusion, que cet arrêt forcé dans mes tentatives de généralisation, me causa

une sorte de désespoir, assez fort pour m'inspirer des doutes sur la théorie de physique mathématique que je cultivais, et dans laquelle je venais de découvrir une lacune considérable. Il m'avait semblé que, la nature se montrant particulièrement géométrique dans les phénomènes de la cristallisation, c'était précisément là que le géomètre pouvait triompher. Tout au contraire, il n'était parvenu qu'à grand'peine, à traiter quelques polyèdres, lesquels se rencontrent peu ou point parmi les cristaux naturels, dont les formes primitives, convenablement choisies, peuvent cependant *paver* tout l'espace, comme l'exigent les séries périodiques.

Il était donc nécessaire de retourner au point de départ de la théorie analytique de la chaleur, pour tâcher de l'étendre aux milieux cristallins. Duhamel a, le premier, abordé cette importante question, dans son beau Mémoire : *Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens*, inséré au tome XIII du *Journal de l'École Polytechnique*.

Le principe admis est celui-ci : Lorsque deux molécules, très-voisines, d'un milieu solide athermane et homogène, ont des températures inégales, la plus chaude cède à la plus froide, une quantité de chaleur égale au produit, de la différence des températures, par l'élément du temps, et par un troisième facteur dépendant à la fois, et de la distance, et des angles qui assignent sa direction; ce facteur ayant toutefois la même valeur pour deux directions opposées l'une à l'autre.

De là résulte ce corollaire, que le flux de chaleur

qui traverse un élément-plan quelconque, contient, non-seulement la variation, de la fonction cherchée, normale à cet élément, mais aussi ses variations tangentielles; ou, plus simplement, que le flux est oblique, et non normal; c'est-à-dire qu'il est proportionnel à la variation de la température, prise dans une certaine direction, oblique à l'élément.

Mais, il existe, en chaque point, trois éléments-plans rectangulaires entre eux, pour lesquels seuls le flux est normal; et si l'on prend les coordonnées rectilignes parallèles aux intersections de ces éléments, lesquelles ont des directions constantes dans toute l'étendue du milieu homogène, l'équation aux différences partielles du second ordre, qui régit la température, a la même forme que celle de Fourier, mais avec trois coefficients distincts au lieu d'un seul.

Pour entrer dans la phase définitive que j'ai indiquée, il ne reste plus qu'à écarter la restriction imposée par l'identité admise des valeurs de la fonction-facteur pour deux directions opposées l'une à l'autre. On y parvient aisément. Alors, il peut se faire qu'il n'y ait qu'une seule direction de l'élément-plan, pour laquelle le flux soit normal, et l'on ne peut plus employer la méthode, si élégante, de Duhamel, pour réduire l'équation aux différences partielles, à la même forme que celle de Fourier.

Mais, on démontre, d'une autre manière, que, dans le cas général, ou sans restriction aucune, il existe toujours un système d'axes rectangulaires, et un seul, qui reproduit la forme cherchée avec trois coefficients distincts. En outre, si l'on imagine un ellipsoïde, ayant ses trois axes parallèles à ceux de ce système

rectangulaire unique, et proportionnels aux racines carrées des trois coefficients trouvés, la même forme est conservée, pour tous les systèmes de coordonnées obliques, qui rapportent cet ellipsoïde à des diamètres conjugués.

Cette dernière propriété générale, si simple et si naturelle qu'on a pu la trouver évidente, est surtout fort importante par l'extension qu'elle donne à la théorie. Elle appartient, nécessairement, au cas très-étendu considéré par Duhamel. Et l'on peut dire qu'elle se retrouve aussi dans le cas si restreint traité par Fourier, car, alors, par l'égalité des trois axes, l'ellipsoïde devient une sphère, et les diamètres conjugués sont rectangulaires.

En un mot, dans ces cas divers, il existe toujours une infinité de systèmes d'axes, pour lesquels l'équation aux différences partielles a la forme cherchée. Ces systèmes sont tous rectangulaires, lors d'une conductibilité constante. Un seul est rectangulaire, et tous les autres obliques, lors d'une conductibilité changeante. Il me semble que ce genre de parallélisme méritait d'être signalé ; et peut-être ne lui manque-t-il qu'un peu de complication pour être érigé en théorème important.

Outre *l'ellipsoïde* précédent, que j'appellerai *principal,* il y a lieu de considérer une autre surface représentative. Si, à partir d'un point du milieu, on porte sur la direction du flux, normal ou oblique, qui traverse tout élément-plan passant par ce point, une longueur proportionnelle au coefficient, qui mesure la conductibilité correspondante à cette direction, les

secondes extrémités de toutes les lignes ainsi prises, forment un second *ellipsoïde*, celui *des conductibilités*, lequel se réduit pareillement à une sphère, dans le cas traité par Fourier.

Lors de l'égalité symétrique, considérée par Duhamel, les axes de l'ellipsoïde des conductibilités ont mêmes directions que ceux de l'ellipsoïde principal, et sont proportionnels à leurs carrés. De plus, chaque demi-diamètre du premier ellipsoïde, représente la conductibilité correspondante au flux oblique, qui traverse l'élément-plan parallèle au plan tangent de l'ellipsoïde principal, au point où ce demi-diamètre le rencontre.

Lors du cas général, ou sans restriction aucune, les axes de l'ellipsoïde des conductibilités, et ceux de l'ellipsoïde principal ont des directions différentes. Mais, on démontre qu'il existe un système de coordonnées obliques, et un seul, par lequel les deux ellipsoïdes se trouvent, l'un et l'autre, rapportés à des diamètres conjugués. Il résulte de cette propriété, que, pour un même ellipsoïde principal, une infinité d'ellipsoïdes des conductibilités seraient admissibles. Et comme il n'en saurait exister qu'un seul lors de l'égalité symétrique, on a ainsi une sorte de mesure de la restriction qu'il importait d'écarter.

Dans tous les cas, les propriétés des surfaces du second ordre suffisent, pour énoncer, très-simplement, les lois les plus générales de la conductibilité, lesquelles rappellent, et celles des moments d'inertie, et celles des forces élastiques. Et, tout porte à penser que ces rapprochements ne sont pas de simples analogies,

mais qu'ils indiquent une véritable convergence, d'où l'on pourra déduire une identité. Les vérifications physiques ne manquent pas à la théorie que je viens de résumer : car, les anciennes et belles expériences de Senarmont, signalent bien nettement l'existence de l'ellipsoïde des conductibilités.

On verra, dans le Cours actuel, comment la physique mathématique, désormais purifiée, parvient à combler cette lacune, qui me désespérait jadis. Aujourd'hui, et grâce à Duhamel, l'horizon est bien changé; car, la théorie analytique de la chaleur, parvenue à sa phase définitive, peut aborder maintenant tous les polyèdres cristallins, sans exception. A l'aide des coordonnées obliques, sinon orthogonales, toutes les facettes, toutes les troncatures, observées sur les cristaux naturels, s'associent de manière à former, des parallélipipèdes, des rhomboèdres, des prismes triangulaires ou hexagonaux, des tétraèdres, des octaèdres, des dodécaèdres rhomboïdaux, réguliers ou irréguliers, dont le refroidissement par communication s'exprime à l'aide des séries périodiques.

Et cette généralisation s'étend immédiatement à la théorie de l'élasticité. En effet, lorsqu'il s'agit des vibrations, dites longitudinales, d'un corps solide homogène, les projections du déplacement moléculaire sont les dérivées d'une même fonction, qui doit vérifier une équation aux différences partielles, aussi simple que celle de la chaleur. Et, les deux équations, ici comparées, sont tellement liées l'une à l'autre, qu'il suffit de remplacer les exponentielles, et les sinus, par des cosinus, dans la série périodique qui exprime le

refroidissement par communication d'un polyèdre, pour obtenir la série qui exprime l'état vibratoire du même polyèdre, lorsque les molécules de sa surface n'en sortent pas. De là résulte une explication très-lucide, et très-précise, du phénomène de la cristallisation; théorie physique, que nous aurons l'occasion d'esquisser.

J'ai suffisamment défini, maintenant, le point de vue nouveau, sous lequel je présenterai la théorie inaugurée par Fourier. On pourra me reprocher d'avoir autant parlé de l'élasticité que de la chaleur, d'avoir constamment fait marcher de front leurs deux théories, quoique ce Cours ne dût s'occuper que d'une seule. C'est que, en réalité, les deux théories, si différentes quand on les prend à l'origine, vont en se rapprochant de plus en plus, à chaque nouveau progrès.

Leurs marches ont été les mêmes. Leurs premiers, et surtout leurs seconds principes, avaient des analogies évidentes. Et maintenant on découvre entre elles une multitude de points de contact. L'étude des conductibilités, et celle des coefficients de l'élasticité, emploient les mêmes méthodes, ont recours aux mêmes transformations, nécessitent la solution des mêmes problèmes, conduisent à des représentations géométriques identiques. Et si, comme il y a lieu de l'espérer, l'étude des concamérations polyédriques finit par pénétrer le mystère de la constitution intérieure des milieux pondérables, ce nouvel instrument, de la théorie de l'élasticité, aura été découvert par celle de la chaleur.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE V

PREMIÈRE LEÇON.

FLUX DE CHALEUR ÉLÉMENTAIRES.

§ 1. — *Objet du Cours* 1
§ 2. — *Principe adopté* 2
§ 3. — *Flux de chaleur* 3
§ 4. — *Loi de l'échange de chaleur* 4
§ 5. — *Conductibilité angulaire* 6
§ 6. — *Flux coordonnés* 7
§ 7. — *Comparaison des coefficients* 9
§ 8. — *Cas de l'égalité symétrique* 11
§ 9. — *Expressions simples des coefficients* 12
§ 10. — *Flux élémentaires normaux* 14
§ 11. — *Cas des solides non cristallins* 15

DEUXIÈME LEÇON.

PRINCIPE JUSTIFIÉ. — LOIS GÉNÉRALES.

§ 12. — *Continuité de* V. *Proportionnalité* 17
§ 13. — *Variabilité de* F, *et de ses limites* 18
§ 14. — *Emploi des fonctions discontinues* 19
§ 15. — *Justification du principe* 21
§ 16. — *Recherches des équations générales* 22

Pages.
§ 17. — *Emploi du tétraèdre élémentaire*.................. 23
§ 18. — *Équations générales*.............................. 25
§ 19. — *Emploi du parallélipipède*......................... 27
§ 20. — *Équation à la surface*............................. 30
§ 21. — *Équations lors des corps non cristallins*............. 31
§ 22. — *Équations lors de l'égalité symétrique*............... 33

TROISIÈME LEÇON.

ELLIPSOIDE PRINCIPAL.

§ 23. — *Équations lors du cas général*...................... 35
§ 24. — *Équation générale simplifiée*...................... 38
§ 25. — *Équation en coordonnées obliques*.................. 39
§ 26. — *Ellipsoïde principal*.............................. 41
§ 27. — *Formules des coordonnées obliques*................. 43
§ 28. — *Les axes déduits des diamètres*.................... 45
§ 29. — *Application au rhomboèdre*......................... 47
§ 30. — *Équations pour le rhomboèdre*...................... 48
§ 31. — *Cas du prisme oblique symétrique*.................. 50
§ 32. — *Prisme droit à base losange*....................... 53
§ 33. — *Équations pour le prisme symétrique*............... 53

QUATRIÈME LEÇON.

ELLIPSOIDE DES CONDUCTIBILITÉS.

§ 34. — *Rappel des flux normaux*........................... 55
§ 35. — *Introduction des flux obliques*..................... 56
§ 36. — *Conductibilité du flux oblique*..................... 58
§ 37. — *Ellipsoïde des conductibilités*..................... 58
§ 38. — *Cas général de la cristallisation cubique*........... 61
§ 39. — *Recherche d'un flux normal*......................... 63
§ 40. — *Axes de l'ellipsoïde des conductibilités*............ 65

Pages.

§ 41. — *Solutions particulières* 68
§ 42. — *Concours des deux ellipsoïdes* 69
§ 43. — *Axes obliques communs* 71
§ 44. — *Sur l'origine des formes primitives* 72

CINQUIÈME LEÇON.

LOIS DE LA CONDUCTIBILITÉ.

§ 45. — *Problème des flux obliques* 75
§ 46. — *Lois lors de l'égalité symétrique* 76
§ 47. — *Retour au cas général* 78
§ 48. — *Lignes représentatives* 80
§ 49. — *Lois dans le cas général* 81
§ 50. — *Symétrie de la conductibilité* ρ 83
§ 51. — *Recherche des flux coordonnés obliques* 84
§ 52. — *Formules complémentaires* 87
§ 53. — *Lois des flux coordonnés obliques* 89
§ 54. — *Vérification* 91
§ 55. — *Corollaires* 92

SIXIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT PAR COMMUNICATION. — PRISME RECTANGLE.

§ 56. — *Partie différentielle et partie intégrale* 95
§ 57. — *Problème du refroidissement* 97
§ 58. — *Théorème général* 99
§ 59. — *Corollaires généraux* 102
§ 60. — *Refroidissement du prisme rectangle* 104
§ 61. — *Théorèmes spéciaux* 105
§ 62. — *Lois générales pour le prisme rectangle* 106
§ 63. — *Cas de l'état initial constant* 108
§ 64. — *Interprétation analytique* 109

SEPTIÈME LEÇON.

PRISME TRIANGULAIRE $\frac{1}{2}$.

Pages.

§ 65. — *Refroidissement du prisme carré* 111
§ 66. — *Caractères de la solution* 114
§ 67. — *Symétrie calorifique directe* 115
§ 68. — *Symétrie calorifique inverse* 117
§ 69. — *Plan diagonal à zéro, ou sans flux* 119
§ 70. — *Prisme triangulaire* $\frac{1}{2}$. 120
§ 71. — *Loi de son refroidissement* 121
§ 72. — *Cas de l'état initial constant* 123
§ 73. — *Théorèmes, et vérification* 126

HUITIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES $\frac{1}{6}$ ET $\frac{1}{24}$.

§ 74. — *Deux plans diagonaux à zéro* 129
§ 75. — *Deux plans diagonaux sans flux* 131
§ 76. — *Prisme triangulaire* $\frac{1}{4}$. 133
§ 77. — *Refroidissement du cube* 134
§ 78. — *Trois plans diagonaux à zéro* 137
§ 79. — *Tétraèdre* $\frac{1}{6}$. *Son refroidissement* 139
§ 80. — *Cas de l'état initial constant* 141
§ 81. — *Six plans diagonaux à zéro* 142
§ 82. — *Tétraèdre* $\frac{1}{24}$. *Son refroidissement* 144
83. — *Cas de l'état initial constant* 146

NEUVIÈME LEÇON.

PRISME TRIANGULAIRE RÉGULIER.

Pages.

§ 84. — *Loi générale lors d'un plan à zéro* 149
§ 85. — *Conséquences de cette loi* 152
§ 86. — *Prisme triangulaire régulier* 153
§ 87. — *Formation du terme simple* 155
§ 88. — *Facteur en* (x, y) *définitif* 157
§ 89. — *Formation de la série totale* 159
§ 90. — *Vérification de l'équation à la surface* 160
§ 91. — *Formule générale des coefficients* 162
§ 92. — *Groupe coordonné pour les intégrations* 164
§ 93. — *Évaluation du dénominateur* 166

DIXIEME LEÇON.

PRISME TRIANGULAIRE HÉMIRÉGULIER.

§ 94. — *Groupes de séries distincts* 169
§ 95. — *Prisme triangulaire hémirégulier* 170
§ 96. — *Retour au régulier* 172
§ 97. — *Relations des facteurs en* (x, y) 174
§ 98. — *Série symétrique pour le régulier* 176
§ 99. — *Cas de son état initial constant* 178
§ 100. — *Même cas pour l'hémirégulier* 181
§ 101. — *Cas des faces latérales imperméables* 183
§ 102. — *Propriétés des nouveaux facteurs* 184
§ 103. — *Valeurs des coefficients* 186

ONZIÈME LEÇON.

PRISME HEXAGONAL RÉGULIER.

Pages.

§ 104. — *Séries multiples comparées* 189
§ 105. — *Prisme hexagonal régulier* 190
§ 106. — *Formation des séries particulières* 192
§ 107. — *Cas des faces latérales à zéro* 195
§ 108. — *Plans normaux et diagonaux* 198
§ 109. — *Cas des faces latérales imperméables* 199
§ 110. — *Réseau du triangulaire régulier* 201
§ 111. — *Réseau de l'hémirégulier* 202
§ 112. — *Réseau du triangulaire* $\frac{1}{2}$ 203
§ 113. — *Polyèdres composés de tétraèdres* $\frac{1}{24}$ 204

DOUZIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT DES POLYÈDRES CRISTALLINS. — PRISMES OBLIQUES.

§ 114. — *Refroidissement des corps cristallins* 207
§ 115. — *Parallélipipède obliquangle* 210
§ 116. — *Prisme à deux arêtes primitives* 211
§ 117. — *Premier plan diagonal à zéro* 212
§ 118. — *Second plan diagonal à zéro* 216
§ 119. — *Les deux plans diagonaux à zéro* 219
§ 120. — *Prismes triangulaires distincts* 221
§ 121. — *Termes simples complémentaires* 223
§ 122. — *Prisme tangent suivant les arêtes* 225

TREIZIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES. — PRISMES DES FACETTES.

Pages.

§ 123. — *Prisme à trois arêtes primitives* 227

§ 124. — *Tétraèdres* $\frac{1}{6}$. *Première série* 229

§ 125. — *Seconde série des tétraèdres* $\frac{1}{6}$ 230

§ 126. — *Tétraèdres* $\frac{1}{24}$, *distincts* 234

§ 127. — *Octaèdres et dodécaèdre* 237

§ 128. — *Multiplicité des parallélipipèdes* 238

§ 129. — *Facettes non tangentes* 239

§ 130. — *Nouveaux termes simples* 240

§ 131. — *Leur vérification* 242

§ 132. — *Prismes aux facettes non tangentes* 243

QUATORZIÈME LEÇON.

PRISMES DES TRONCATURES.

§ 133. — *Variétés des troncatures* 247

§ 134. — *Couples de troncatures* 248

§ 135. — *Changement de diamètres conjugués* 250

§ 136. — *Parallélipipède transformé* 253

§ 137. — *Troncatures conjuguées* 254

§ 138. — *Prismes aux couples de troncatures* 256

§ 139. — *Prisme d'une troncature tangente* 257

§ 140. — *Prismes de troncatures non tangentes* 259

§ 141. — *Introduction d'une troncature donnée* 261

§ 142. — *Généralisation des séries* 263

QUINZIÈME LEÇON.

PRISMES TRIANGULAIRES PSEUDORÉGULIERS.

Pages.
§ 143. — *Prismes réguliers déduits du rhomboèdre* 265
§ 144. — *Prisme oblique à base losange* 266
§ 145. — *Nouvelles coordonnées* $P^{(j)}$ 267
§ 146. — *Facteurs u' des prismes pseudoréguliers* 269
§ 147. — *Conditions d'un triangle pseudorégulier* 271
§ 148. — *Angle et rapport de deux médianes* 274
§ 149. — *Relations entre les trois médianes* 275
§ 150. — *Variabilité du triangle pseudorégulier* 278
§ 151. — *Construction graphique générale* 279
§ 152. — *Applications et vérification* 283
§ 153. — *Caractère des prismes pseudoréguliers* 285

SEIZIÈME LEÇON.

THÉORIE DE LA FORMATION DES CRISTAUX.

§ 154. — *Extension aux cristaux diaphanes* 287
§ 155. — *Faits principaux* 289
§ 156. — *Premier lemme* 290
§ 157. — *Second lemme* 292
§ 158. — *Principe adopté* 293
§ 159. — *Théorie physique* 294
§ 160. — *Facettes secondaires* 295
§ 161. — *Associations de facettes* 296
§ 162. — *Associations par concordance* 299
§ 163. — *Résumé et Conclusion* 303

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT PAR RAYONNEMENT.

Pages.
§ 164. — *Cas général du mur*.............................. 305
§ 165. — *Détermination des paramètres*.................... 307
§ 166. — *Terme simple et série totale*...................... 311
§ 167. — *Propriétés des fonctions simples*................... 312
§ 168. — *Introduction de l'état initial*..................... 315
§ 169. — *Détermination des coefficients*.................... 316
§ 170. — *Vérification de l'état initial*...................... 317
§ 171. — *Cas des faces similaires*.......................... 320
§ 172. — *Variétés de l'état initial*......................... 322
§ 173. — *Variétés du pouvoir émissif*....................... 324

DIX-HUITIÈME LEÇON.

PRISME RECTANGLE RAYONNANT.

§ 174. — *Murs orthogonaux*............................. 327
§ 175. — *Poutre à quatre faces rayonnantes*................ 329
§ 176. — *Prisme rectangle rayonnant*...................... 331
§ 177. — *Variétés et vérification*.......................... 333
§ 178. — *Solution pour un polyèdre quelconque*............. 334
§ 179. — *Théorème vérificateur*........................... 336
§ 180. — *Application au prisme rectangle*.................. 338
§ 181. — *Solution pour un prisme droit*.................... 340
§ 182. — *Vérification. Rapport des flux*.................... 342
§ 183. — *Cas d'un prisme indéfini*........................ 344

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

PRISMES TRIANGULAIRES RAYONNANTS.

Pages.

§ 184. — *Prisme triangulaire rectangle isocèle* 347
§ 185. — *Condition de la face hypoténuse* 349
§ 186. — *Équations aux paramètres* 351
§ 187. — *Série totale. Vérification* 354
§ 188. — *Prisme triangulaire régulier* 356
§ 189. — *Condition des faces latérales* 359
§ 190. — *Équations aux paramètres* 360
§ 191. — *Condition de l'état initial* 363
§ 192. — *Cas de* f(z). *Numérateurs des coefficients* 365
§ 193. — *Dénominateurs. Série totale* 367

VINGTIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES RAYONNANTS.

§ 194. — *Rayonnement du tétraèdre* $\frac{1}{6}$ 371
§ 195. — *Formation du terme simple* 372
§ 196. — *Conditions des faces inclinées* 375
§ 197. — *Équations aux paramètres et augments* 378
§ 198. — *Résumé de la solution* 379
§ 199. — *Rayonnement du tétraèdre* $\frac{1}{24}$ 381
§ 200. — *Forme du terme simple* 382
§ 201. — *Condition de la face inclinée* 384
§ 202. — *Équations aux Paramètres* 387
§ 203. — *Solution restreinte* 389

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

ÉTAT PERMANENT. — ÉCHAUFFEMENT.

Pages.
§ 204. — *État permanent d'une poutre* 391
§ 205. — *État permanent d'un prisme rectangle* 394
§ 206. — *Cas général d'un prisme droit* 396
§ 207. — *Cas des prismes triangulaires* 399
§ 208. — *Vérification. Flux compensés* 401
§ 209. — *Problème général de l'échauffement* 403
§ 210. — *Échauffement d'un mur* 405
§ 211. — *État variable d'une barre* 406
§ 212. — *Échauffement de la barre* 408
§ 213. — *Cas particuliers* 409
§ 214. — *Conclusion générale* 413

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR.

PREMIÈRE LEÇON.

FLUX DE CHALEUR ÉLÉMENTAIRES.

Principe adopté. — Loi de l'échange de chaleur. — Conductibilité angulaire. — Flux élémentaires coordonnées. — Cas général d'un milieu cristallisé quelconque. — Cas de l'égalité symétrique. — Cas des solides homogènes non cristallins.

---

§ I.

OBJET DU COURS.

La théorie mathématique, dont le but est de rechercher et d'étudier, rigoureusement, les lois qui régissent la propagation de la chaleur dans les milieux pondérables, ne peut aujourd'hui s'occuper activement que des corps solides, *athermanes* et *homogènes;* c'est-à-dire des corps qui ne se laissent traverser par la chaleur rayonnante que sur une épaisseur très-petite, ou insensible, et qui sont constitués de la même manière autour d'un point, en quelque lieu que ce point soit situé.

Il s'agit, dans le Cours actuel, d'établir les formules de cette théorie, de telle sorte qu'elles puissent s'appliquer aux milieux solides *régulièrement cristallisés;* c'est-à-dire d'une homogénéité telle, que la faculté de propager la chaleur soit variable avec la direction de cette propagation, bien qu'elle reste la même, pour une même direction, lorsqu'on passe d'un point à un autre.

Il est alors nécessaire de modifier, ou d'étendre le principe adopté jusqu'ici, tout en admettant : 1° que la température est une fonction continue des coordonnées et du temps; 2° que la quantité de chaleur cédée, dans un temps très-court, par un premier point plus chaud, à un second point très-voisin et plus froid, est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la très-petite différence des températures de ces deux points.

Nous poserons, dès l'abord, et en quelque sorte synthétiquement, le nouveau principe; puis, après avoir déduit ses conséquences générales, nous le discuterons, afin de constater qu'il embrasse tous les corps solides, athermanes et homogènes, qu'ils soient, ou qu'ils ne soient pas cristallisés.

§ II.

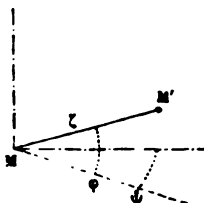
PRINCIPE ADOPTÉ.

Soient M et M' deux points très-voisins du milieu solide; ζ la distance, de grandeur insensible, qui les sépare; φ la latitude et ψ la longitude, qui assignent la direction de $\overline{MM'}$; V la température actuelle en M; V' un peu moindre que V, celle en M'; ϖ et ϖ', deux éléments de volume, dont M et M' font respectivement partie, et qui ont leurs trois dimensions infiniment petites par rapport à ζ. La quantité de chaleur cédée, pendant le temps dt, par le volume ϖ, au volume ϖ', aura pour expression

$$(1) \qquad \varpi\varpi'.(V - V').F.dt$$

Le coefficient F, essentiellement positif, dépend de la distance ζ, et de ses angles de direction (φ, ψ). Il reste le

Fig. 1.



même en quelque lieu, du corps solide homogène, que soit placé le couple défini des points M et M'. Il est nul lorsque la distance ζ dépasse une certaine limite supérieure ζ_1, et aussi lorsqu'elle est au-dessous d'une certaine limite inférieure ζ_0. Ces deux limites, du même ordre de grandeur que ζ, peuvent différer d'une direction à une autre; c'est-à-dire que ζ_0 et ζ_1 sont, en général, des fonctions des angles (φ, ψ).

§ III.

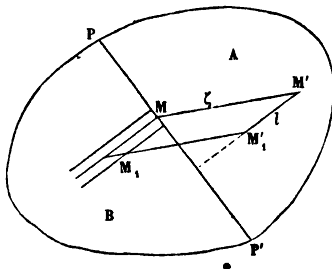
FLUX DE CHALEUR.

Soit PP' une section plane, faite dans le corps solide, et qui le sépare en deux parties A et B. La seconde partie, B, étant plus chaude que la première, A, lui cède, dans le temps dt, une certaine quantité de chaleur. C'est le *flux total* qui traverse PP'. Si l'on divise B en cylindres infiniment déliés, ayant chacun sa base ω sur PP', et ses génératrices normales à ce plan; la quantité de chaleur partiellement envoyée, pendant le temps dt, par un de ces cylindres, au fragment A, est le *flux élémentaire*, correspondant à sa base ω. Il s'agit d'évaluer ce flux élémentaire.

A cet effet, transportons successivement le couple (M, M'), défini au paragraphe précédent, de telle sorte que M occupe

d'abord la trace de l'axe du cylindre sur sa base ω, et qu'il occupe ensuite un autre point M_1 du même axe, situé dans B, à une distance $\overline{M_1 M} = l$, telle, que la seconde extrémité de ζ, d'abord en M', puis en M'_1, soit toujours dans A.

Fig. 2.



Le plan des xy étant l'équateur, celui zx le premier méridien, désignons, pour simplifier, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par c et s, $\cos\psi$ et $\sin\psi$ par c' et s'; les projections (g, h, k) de ζ, sur les axes rectilignes, auront pour expressions

$$(2) \qquad g = \zeta c c', \quad h = \zeta c s', \quad k = \zeta s;$$

de plus (m, n, p) représentant les cosinus des angles que fait la normale $\overline{M_1 M}$ avec les mêmes axes, les projections de la ligne l seront (ml, nl, pl).

§ IV.

LOI DE L'ÉCHANGE DE CHALEUR.

Cela posé, les coordonnées de M étant (x, y, z), celles de M' seront $(x+g, y+h, z+k)$, celles de M_1 $(x-ml, y-nl, z-pl)$, enfin celles de M'_1 seront $(x+g-ml, y+h-nl, z+k-pl)$; et si la température est, V en M, V' en M', V_1 en M_1, V'_1 en M'_1, la série de Taylor, réduite à ses premiers termes, par suite de l'ex-

trême petitesse des (ζ, g, h, k), donnera

$$V' = V + \frac{dV}{dx} g + \frac{dV}{dy} h + \frac{dV}{dz} k,$$

$$V_1 = V - ml \frac{dV}{dx} - nl \frac{dV}{dy} - pl \frac{dV}{dz},$$

$$V'_1 = V + (g - ml) \frac{dV}{dx} + (h - nl) \frac{dV}{dy} + (k - pl) \frac{dV}{dz};$$

d'où l'on conclut le théorème important

$$(3) \quad V_1 - V'_1 = V - V' = \zeta \left(- \frac{dV}{dx} cc' - \frac{dV}{dy} cs' - \frac{dV}{dz} s \right).$$

C'est-à-dire que l'échange de chaleur (1) sera le même, non-seulement par le coefficient F, mais encore par la différence des températures, pour toutes les positions (M_1, M'_1) du couple défini, correspondantes à toutes les valeurs admissibles de la ligne l.

On peut adopter, pour ϖ, la couche ωdl, du cylindre infiniment délié, où se trouve M_1, et prendre l'élément sphérique $\zeta^2 c d\zeta\, d\varphi\, d\psi$, rapporté au centre M_1, pour représenter le volume ϖ' dont M'_1 fait partie. Ce qui donnera définitivement

$$(4) \quad \omega dl . \zeta^2 c d\zeta\, d\varphi\, d\psi \left(- \frac{dV}{dx} cc' - \frac{dV}{dy} cs' - \frac{dV}{dz} s \right) F dt,$$

pour l'échange de chaleur actuel. Le signe (—) qui affecte les trois termes de la parenthèse, tient à cette circonstance, que la partie B, supposée plus chaude que A, est aussi plus voisine de l'origine des coordonnées ; car, puisque la température est supposée décroître quand on s'éloigne de l'origine, ou de M vers M', de M_1 vers M'_1, les dérivées partielles de la fonction qui la représente, prises dans ce sens, étant négatives, il faut qu'elles soient affectées du signe (—), pour que l'échange (4) soit définitivement positif. Si la

fonction V était croissante, ses dérivées seraient positives, et l'échange (4) serait négatif; c'est-à-dire que ce serait ϖ, et non ϖ', qui gagnerait de la chaleur; mais, alors, le coefficient F, toujours essentiellement positif, correspondrait à la direction $(-\varphi, \pi+\psi)$, et pourrait avoir une valeur différente de celle qui correspond à la direction (φ, ψ).

§ V.

CONDUCTIBILITÉ ANGULAIRE.

Il faut soumettre l'échange (4) à quatre intégrations successives : la première, par rapport à l, depuis zéro, jusqu'à la projection

$$(5) \qquad \zeta(mcc' + ncs' + ps)$$

de ζ sur l'axe du cylindre; la seconde, par rapport à ζ, entre ζ_0 et ζ_1 fonctions de (φ, ψ), intégration que l'on peut indiquer en posant

$$(6) \qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \zeta^4 . \mathrm{F} . d\zeta = \mathcal{F}(\varphi, \psi) = \mathcal{F}.$$

Puis, si φ_0 et φ_1, ψ_0 et ψ_1, sont les limites qu'il faut donner successivement aux variables φ et ψ, pour parcourir toute la surface de l'hémisphère de rayon 1, dont le centre est en M, la base sur PP', et qui est dans A; posant encore

$$(7) \quad \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi . \mathcal{F} . (mc^2c' + nc^2s' + pcs) . \varepsilon = \begin{cases} = \mathcal{A} \text{ si } \varepsilon = cc', \\ = \mathcal{B} \text{ si } \varepsilon = cs', \\ = \Gamma \text{ si } \varepsilon = s, \end{cases}$$

et, remarquant que les dérivées de V restent constantes lors de toutes ces intégrations, on aura définitivement

$$(8) \qquad \omega\, dt \left(- \mathcal{A} \frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathcal{B} \frac{d\mathrm{V}}{dy} - \Gamma \frac{d\mathrm{V}}{dz} \right),$$

pour exprimer le flux élémentaire cherché, lequel correspond à la base ω, située sur le plan PP', et dont le point M, aux coordonnées (x, y, z), occupe le centre.

La fonction $\mathfrak{F}$ (6) mesure, en quelque sorte, la faculté que possède le milieu solide, de propager ou de conduire la chaleur dans la direction (φ, ψ) : car, la quantité de chaleur cédée à A, par le prisme de base ω, suivant cette seule direction, est proportionnelle à $\mathfrak{F}$, qui entre comme facteur dans les éléments différentiels (7). Les autres facteurs étant sans dimension géométrique, $\mathfrak{F}$ est de même ordre de grandeur, ou de même espèce, que les coefficients, tels que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \Gamma)$ (7), généralement désignés sous le nom de *conductibilités*, on peut donc appeler cette fonction la *conductibilité angulaire*.

§ VI.

FLUX COORDONNÉS.

Soient désignés par $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, trois éléments plans en M, respectivement perpendiculaires aux axes; les flux qui leur appartiennent auront les expressions

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_x dt\left(-\alpha\frac{dV}{dx}-\beta\frac{dV}{dy}-\gamma\frac{dV}{dz}\right),\\ &\omega_y dt\left(-\alpha_1\frac{dV}{dx}-\beta_1\frac{dV}{dy}-\gamma_1\frac{dV}{dz}\right),\\ &\omega_z dt\left(-\alpha_2\frac{dV}{dx}-\beta_2\frac{dV}{dy}-\gamma_2\frac{dV}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

(Pour simplifier le texte, j'emploie les notations et les dénominations suivantes : La lettre i désigne, collectivement, plusieurs indices numériques affectant les mêmes lettres, ou bien l'un quelconque d'entre eux : ainsi, les intégrales doubles (7) ont pour limites les (φ_i, ψ_i). La

lettre u désigne, collectivement, les coordonnées (x, y, z), ou bien l'une quelconque d'entre elles : ainsi, les flux (9) correspondent aux éléments ω_u. Enfin, comme dans un Cours précédent, j'appelle *variation d'une quantité suivant une certaine ligne,* la limite du rapport de l'accroissement de cette quantité au chemin parcouru sur la ligne, abstraction faite du coefficient qui multiplie ce rapport, et qui peut être le chemin lui-même. Ainsi, les expressions (9) contiennent les variations de la température V suivant les (x, y, z); les trois coefficients $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$ multiplient les variations respectivement *normales* aux éléments ω_u, les six autres les variations *tangentielles* aux mêmes éléments; tous peuvent être appelés des *conductibilités résultantes,* normales et tangentielles.)

Les coefficients $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ se déduisent des intégrales définies (7), en donnant, successivement aux cosinus (m, n, p), et aux limites (φ_i, ψ_i), les valeurs correspondantes aux trois positions particulières du plan $\overline{PP'}$. On obtient ainsi le tableau

$$(10)\qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\[2ex] \displaystyle\int_{0}^{\pi} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\[2ex] \displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\psi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \end{array}\right\} . \mathcal{J} . \left\{\begin{array}{l} c^3 c'^2 = \alpha, \\ c^3 c' s' = \beta, \\ c^2 s e' = \gamma; \\[1ex] c^3 c' s' = \alpha_1, \\ c^3 s'^2 = \beta_1, \\ c^2 s s' = \gamma_1; \\[1ex] c^2 s e' = \alpha_2, \\ c^2 s s' = \beta_2, \\ c s^2 = \gamma_2. \end{array}\right.$$

Les trois cases de la première colonne indiquent les limites (φ_i, ψ_i) pour les trois ω_u; vient ensuite le facteur $\mathcal{F}$ commun à toutes les intégrales; puis la dernière colonne donne les facteurs trigonométriques qui particularisent les $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$.

§ VII.

COMPARAISON DES COEFFICIENTS.

Les derniers facteurs sont les mêmes, pour γ_1 et β_2, pour α_2 et γ, pour β et α_1; mais il ne s'ensuit pas nécessairement que les coefficients de chacun de ces groupes soient égaux, car les limites des (φ, ψ) diffèrent d'un coefficient à l'autre. Cet obstacle à leur comparaison disparaît, si l'on concentre toutes les intégrations entre o et $\frac{\pi}{2}$, pour φ et pour ψ, à l'aide des formules générales

$$(11)\left\{\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\xi)\,d\xi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\xi)+f(-\xi)]\,d\xi,\\ \int_0^{\pi} f(\psi)\,d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\psi)+f(\pi-\psi)]\,d\psi,\\ \int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\psi)+f(\pi-\psi)+f(\pi+\psi)+f(-\psi)]\,d\psi, \end{aligned}\right.$$

(ξ étant ou φ, ou ψ), dans lesquelles on substitue, à f, la fonction $\mathcal{F}$ accompagnée des facteurs trigonométriques, qui conservent les mêmes valeurs absolues, mais avec des signes

divers, pour toutes les directions $(\pm\varphi, \pm\psi)$, $(\pm\varphi, \pi\pm\psi)$; d'où résulte

$$
(12)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi
\left\{
\begin{array}{l}
\hline
[\mathcal{F}(\varphi,\psi) + \mathcal{F}(\varphi, -\psi) + \mathcal{F}(-\varphi,\psi) + \mathcal{F}(-\varphi, -\psi)]c^3 c'^2 = \\
[\quad + \qquad\quad - \qquad\quad + \qquad\quad - \quad]c^2 c' s' = \\
[\quad + \qquad\quad + \qquad\quad - \qquad\quad - \quad]c^2 s c' = \\
\hline
[\quad + \qquad\quad - \qquad\quad + \qquad\quad - \quad]c^3 c' s' = \\
[\mathcal{F}(\varphi,\psi) + \mathcal{F}(\varphi, \pi-\psi) + \mathcal{F}(-\varphi,\psi) + \mathcal{F}(-\varphi, \pi-\psi)]c^3 s'^2 = \\
[\quad + \qquad\quad + \qquad\quad - \qquad\quad - \quad]c^2 s s' = \\
\hline
[\quad + \qquad\quad - \qquad\quad - \qquad\quad + \quad]c^2 s c' = \\
[\quad + \qquad\quad + \qquad\quad - \qquad\quad - \quad]c^2 s s' = \\
[\mathcal{F}(\varphi,\psi) + \mathcal{F}(\varphi, \pi-\psi) + \mathcal{F}(\varphi, \pi+\psi) + \mathcal{F}(\varphi, -\psi)]c s^2 = \\
\hline
\end{array}
\right.
$$

Ici, les limites des (φ, ψ) sont partout les mêmes, et dans l'élément différentiel qui correspond à chaque coefficient, les facteurs trigonométriques sont conservés; mais le facteur primitivement commun, $\mathcal{F}$, est remplacé par une somme algébrique des valeurs de la fonction (6) appartenant à quatre directions différentes; valeurs qui sont les mêmes, avec des signes divers, pour les trois coefficients d'une même case, mais qui diffèrent d'une des trois cases à une autre.

Toutes les valeurs de la fonction $\mathcal{F}$ étant essentiellement positives et les facteurs trigonométriques ne changeant pas de signe entre les limites (φ_i, ψ_i) actuelles, le tableau (12) montre que les trois coefficients $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$ sont toujours positifs, tandis que $(\beta, \gamma; \gamma_1, \alpha_1; \alpha_2, \beta_2)$ sont positifs ou négatifs, suivant les grandeurs relatives de la conductibilité angulaire : car, chacune des intégrales définies (12) se dé-

compose en quatre intégrales partielles, toutes positives pour $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$, dont deux sont positives et deux négatives pour les six autres coefficients.

§ VIII.

CAS DE L'ÉGALITÉ SYMÉTRIQUE.

D'après le nouveau tableau (12), pour que les égalités présumées

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_2, \\ \alpha_2 &= \gamma, \\ \beta &= \alpha_1, \end{aligned} \right.$$

aient lieu, il faut que la fonction $\mathcal{F}$ vérifie les trois identités

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi, \pi - \psi) &= \mathcal{F}(-\varphi, -\psi), \\ \mathcal{F}(-\varphi, \pi - \psi) &= \mathcal{F}(\varphi, -\psi), \\ \mathcal{F}(\varphi, \pi + \psi) &= \mathcal{F}(-\varphi, \psi); \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, plus simplement, qu'elle ait symétriquement la même valeur, pour deux directions opposées l'une à l'autre. Supposer l'existence de ces trois identités, ou de cette *égalité symétrique,* c'est donc restreindre la généralité de la question traitée, comme si l'on établissait, hypothétiquement, trois relations nouvelles, entre neuf coefficients, qui, généralement, peuvent être tous distincts.

Néanmoins, cette restriction paraissant concorder avec les phénomènes physiques, pour la presque totalité des milieux cristallins, il convient de traiter particulièrement le cas qu'elle suppose. Admettant donc les égalités (13), désignons, respectivement, par (λ, μ, ν) les valeurs communes des trois couples, et par (α, β, γ) sans indices les coefficients $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$ qui restent distincts. Les trois

flux (9) auront alors les expressions nouvelles

$$(15)\quad \begin{cases} \omega_x dt\left(-\alpha\dfrac{dV}{dx}-\nu\dfrac{dV}{dy}-\mu\dfrac{dV}{dz}\right),\\ \omega_y dt\left(-\nu\dfrac{dV}{dx}-\beta\dfrac{dV}{dy}-\lambda\dfrac{dV}{dz}\right),\\ \omega_z dt\left(-\mu\dfrac{dV}{dx}-\lambda\dfrac{dV}{dy}-\gamma\dfrac{dV}{dz}\right),\end{cases}$$

dont les coefficients représentent les intégrales définies du tableau

$$(16)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathcal{F}(\varphi,\psi)+\mathcal{F}(\varphi,-\psi)+\mathcal{F}(-\varphi,\psi)+\mathcal{F}(-\varphi,-\psi)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{pmatrix}\begin{matrix}c^3c'^2=\alpha,\\ c^3s'^2=\beta,\\ cs^2=\gamma;\end{matrix}\\ (\quad+\qquad-\qquad-\qquad+\quad)\,c^2ss'=\lambda,\\ (\quad+\qquad+\qquad-\qquad-\quad)\,c^2sc'=\mu,\\ (\quad+\qquad-\qquad+\qquad-\quad)\,c^3s'c'=\nu;\end{cases}$$

la parenthèse, ou la somme algébrique des quatre valeurs de $\mathcal{F}$, étant la même pour les (α, β, γ), et différant, par les signes, pour les (λ, μ, ν).

§ IX.

EXPRESSIONS SIMPLES DES COEFFICIENTS.

Autrement : la fonction $\mathcal{F}$ peut être considérée comme composée de quatre parties : la première paire en φ et en ψ, la seconde paire en φ et impaire en ψ, la troisième impaire en φ et paire en ψ, enfin la quatrième impaire en φ et en ψ; ce qu'exprime symboliquement la première des quatre équations du groupe suivant :

$$(17)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\varphi,\psi)=\overline{pp}+\overline{pi}+\overline{ip}+\overline{ii},\\ \mathcal{F}(\varphi,-\psi)=\overline{pp}-\overline{pi}+\overline{ip}-\overline{ii},\\ \mathcal{F}(-\varphi,\psi)=\overline{pp}+\overline{pi}-\overline{ip}-\overline{ii},\\ \mathcal{F}(-\varphi,-\psi)=\overline{pp}-\overline{pi}-\overline{ip}+\overline{ii};\end{cases}$$

les trois autres s'en déduisant par les changements de signes des variables. A l'aide de ce groupe (17), on reconnaît facilement, qu'au tableau (16), la parenthèse se réduit, à $\overline{4pp}$ pour (α, β, γ), à $\overline{4ii}$ pour λ, à $\overline{4ip}$ pour μ, à $\overline{4pi}$ pour ν.

C'est-à-dire, plus simplement, qu'après les substitutions (17), chaque parenthèse de (16) aura la même double parité que le facteur trigonométrique qui l'accompagne. Les éléments différentiels seront donc tous pairs en φ et en ψ, et l'on pourra étendre les intégrations entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, pour φ et pour ψ, puis prendre le quart des résultats. Or, avec ces nouvelles limites, on peut joindre, à celle des quatre parties de la première (17) qui remplace chaque parenthèse, les trois autres parties; ce qui n'ajoute à l'élément différentiel total que des termes, impairs en φ, en ψ, ou en φ et en ψ, disparaissant par la double intégration. En un mot, avec les nouvelles limites, toutes les parenthèses peuvent être remplacées par la fonction $\mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ complète.

Cela fait : remplaçant la fonction $\mathfrak{F}$ elle-même par la valeur (6); remarquant que, par suite de l'égalité supposée, le triple signe d'intégration

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} d\zeta \ldots$$

indique la moitié d'une sommation faite dans la couche comprise entre les deux surfaces définies par les rayons vecteurs ζ_0 et ζ_1; sommation que nous indiquerons par $\sum$; recomposant l'élément sphérique $\zeta^2 c d\zeta d\varphi d\psi = \varpi$; assimilant la fonction F à une sorte de densité Δ; puis le

produit $\varpi\Delta$ à une sorte de masse m; les expressions (16) des six coefficients actuels prennent définitivement la forme

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum m\,(\zeta cc')^2 = \alpha = \frac{1}{2}\sum mx^2, \\ \frac{1}{2}\sum m\,(\zeta cs')^2 = \beta = \frac{1}{2}\sum my^2, \\ \frac{1}{2}\sum m\,(\zeta s)^2 = \gamma = \frac{1}{2}\sum mz^2; \\ \frac{1}{2}\sum m.\zeta cs'.\zeta s = \lambda = \frac{1}{2}\sum myz, \\ \frac{1}{2}\sum m.\zeta s.\zeta cc' = \mu = \frac{1}{2}\sum mzx, \\ \frac{1}{2}\sum m.\zeta cc'.\zeta cs' = \nu = \frac{1}{2}\sum mxy; \end{cases}$$

(x, y, z) représentant, ici, les projections du rayon vecteur ζ, ou les coordonnées par rapport au point M pris pour origine.

§ X.

FLUX ÉLÉMENTAIRES NORMAUX.

Dans le cas actuel, l'enveloppe solide fictive, comprise entre les surfaces

$$\zeta = \zeta_0(\varphi, \psi), \quad \zeta = \zeta_1(\varphi, \psi),$$

a son centre de gravité en M; et la théorie classique des moments d'inertie donne, pour son ellipsoïde central, l'équation

$$(19)\quad \begin{cases} (\beta+\gamma)X^2 + (\gamma+\alpha)Y^2 + (\alpha+\beta)Z^2 \\ -2\lambda YZ - 2\mu ZX - 2\nu XY = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

à l'aide des valeurs (18). Cette équation (17) définit très-nettement les six coefficients des flux élémentaires coordonnés (15). Ceux relatifs à d'autres axes rectangulaires se déduiraient des premiers, par les formules de transformation habituelles. Il suffit donc de connaître les coefficients des flux (15) pour un seul système orthogonal. Or on peut choisir celui des axes de l'ellipsoïde (19) pour lequel *les coefficients* (λ, μ, ν) *sont nécessairement nuls*. Et de là résulte le théorème suivant :

Lors de l'égalité symétrique, il existe toujours un système d'axes rectangulaires, et un seul, pour lequel les flux élémentaires coordonnés (15), ne comprenant, chacun, que la variation normale de la température, ont des expressions de la forme

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_x\, dt \left(-\alpha \dfrac{dV}{dx}\right), \\ \omega_y\, dt \left(-\beta \dfrac{dV}{dy}\right), \\ \omega_z\, dt \left(-\gamma \dfrac{dV}{dz}\right); \end{cases}$$

tandis que pour tout autre système d'axes rectangulaires les trois flux (15) comprennent, chacun, outre la variation normale de la température, ses deux variations tangentielles ; et les six coefficients de ces dernières variations sont égaux deux à deux.

§ XI.

CAS DES SOLIDES NON CRISTALLINS.

Si l'on considère un milieu solide non cristallin dans son état d'homogénéité la plus complète, on ne trouve aucune raison pour admettre que F (§ II), et les limites ζ_0 et ζ, varient avec la direction (φ, ψ). Alors l'intégrale définie (6)

se réduit à une constante absolue $\mathcal{I}$. Au tableau (12), les $(\beta, \gamma, \gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$ sont nuls, et les $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$, qui restent seuls, ont les expressions

$$(21) \qquad 4\mathcal{I}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \begin{cases} c^3 c'^2 = \alpha, \\ c^3 s'^2 = \beta_1, \\ cs^2 = \gamma_2, \end{cases}$$

toutes définitivement égales à

$$(22) \qquad \frac{2\pi\mathcal{I}}{3},$$

valeur commune que nous désignerons par q. Ce qui donne pour le flux correspondant à tout élément plan

$$(23) \qquad \omega\, dt. \left(-q\frac{dV}{d\mathfrak{N}}\right);$$

$d\mathfrak{N}$ étant l'accroissement de la normale à l'élément, et q la conductibilité constante.

Ainsi, dans un milieu solide homogène, non cristallin, chaque flux élémentaire ne comprend que la variation normale de la température, et le coefficient de cette variation est le même pour tous les éléments plans, quelle que soit leur orientation. L'expression (23) est identique avec celle que Fourier a déduite d'une loi physique, prise pour point de départ. Dans la théorie actuelle, cette expression est rigoureusement établie ; et l'on voit clairement qu'elle ne doit pas comprendre les variations tangentielles de la température : ce dont on pouvait douter avec l'ancienne méthode.

DEUXIÈME LEÇON.

PRINCIPE JUSTIFIÉ. — LOIS GÉNÉRALES.

Justification du principe. — Continuité de la température. — Proportionnalité de l'échange de chaleur. — Variabilité de la conductibilité angulaire. — Lois générales, déduites du tétraèdre élémentaire. — Équations lors d'un solide non cristallin. — Équations lors de l'égalité symétrique.

---

§ XII.

CONTINUITÉ DE V. — PROPORTIONNALITÉ.

Discutons maintenant les diverses parties du principe posé au § II, pour constater qu'il donne réellement à la théorie actuelle toute l'extension qu'elle se propose. Rappelons d'abord que la fonction V, qui exprime la température, peut être regardée comme une fonction continue, dont les dérivées ou les variations sont toujours assignables. En effet, lors même qu'elle n'aurait de valeurs que pour les points matériels, disséminés et non contigus, constituant le milieu solide, on conçoit que l'interpolation puisse déterminer une fonction reproduisant les mêmes valeurs; et cette fonction interpolaire, substituée à V, sera continue, car elle donnera aussi des valeurs pour les points géométriques intermédiaires; puis, lors de toute sommation, faite à l'aide de cette fonction et de ses dérivées, il existera toujours, parmi leurs facteurs, un coefficient spécifique exprimant une certaine faculté calorifique de chaque point matériel; coefficient qui sera nul pour tous les points géométriques, lesquels n'auront conséquemment aucune influence sur les résultats de la sommation.

Constatons ensuite que l'échange de chaleur, qui s'opère entre deux points, peut être considéré comme étant proportionnel à la différence ΔV de leurs températures. En effet, la quantité de chaleur échangée serait évidemment nulle, si les deux points avaient la même température; cette quantité peut donc être assimilée à une fonction de ΔV, qui, développée suivant les puissances entières de cette variable, n'aura pas de terme correspondant à la puissance zéro, et qui se réduira au terme contenant la puissance 1, si ΔV est très-petit, Or, c'est ce qui aura toujours lieu dans un milieu solide athermane, puisque les points, entre lesquels peut s'opérer un échange de chaleur, y sont extrêmement voisins, et que les ΔV correspondants doivent être aussi peu sensibles que les distances qui séparent ces points.

§ XIII.

VARIABILITÉ DE F ET DE SES LIMITES.

Justifions maintenant la variabilité des limites ζ_0, ζ_1, et du coefficient F. (Il ne faut pas l'oublier, dans l'étude que nous entreprenons, il s'agit d'explorer, non pas ce qui est le plus généralement, mais tout ce qui pourrait être, afin de ne laisser en dehors aucun des cas exceptionnels que la nature peut réaliser.) D'après l'ensemble de ses propriétés physiques, on est conduit à considérer un milieu solide, homogène et cristallin, comme composé de *molécules intégrantes* d'une certaine forme, non sphérique, polyédrique peut-être, toutes égales en volume, et orientées de la même manière, par les forces qui les maintiennent séparées, mais de telle sorte que leurs centres de gravité ne sont équidistants que sur une même direction.

Alors, dans le couple défini au § II, M étant le centre de gravité d'une molécule, il peut se faire que ζ doive être

toujours supérieur au rayon vecteur ζ_0, mené de son centre M à la surface qui la limite; distance variable avec la direction (φ, ψ), puisque cette surface n'est pas sphérique. En effet, s'il existe une différence entre les températures de deux points M et m', de la molécule intégrante, et si cette différence est essentielle à la constitution même de cette molécule, elle doit se conserver, et il ne peut s'opérer d'échange de chaleur entre M et m'; donc, si le ΔV n'est pas nul, le coefficient F doit l'être.

De plus, le volume total du solide cristallin est divisible en *systèmes particulaires* égaux, nécessairement polyédriques, et ne contenant chacun qu'une molécule intégrante. Cela posé, la ligne menée de M dans la direction (φ, ψ) atteindra la limite supérieure ζ_1, après avoir traversé un certain nombre, $\mathfrak{N}$, de systèmes particulaires; si, comme il est probable, ce nombre $\mathfrak{N}$ est le même pour toutes les directions, la distance ζ_1 sera composée d'un même nombre de parties; mais ces parties auront des grandeurs différentes d'une direction à une autre, d'après la forme et la position relative des volumes élémentaires; ζ_1 variera donc avec (φ, ψ). Et il en sera de même du coefficient F, dont la puissance, pour une distance quelconque ζ, doit dépendre du nombre des systèmes particulaires traversés; nombre qui, inversement, peut être différent d'une direction à une autre pour le même ζ.

§ XIV.

EMPLOI DES FONCTIONS DISCONTINUES.

La suite de la discussion actuelle exige quelques réflexions préliminaires. Dans les diverses branches de la physique mathématique, il est souvent nécessaire d'indiquer, sinon d'effectuer, la sommation d'une certaine quantité, qui ne peut avoir de valeurs que pour des points dis-

séminés dans un milieu pondérable, et non contigus. Cette quantité est une fonction aussi discontinue qu'il est possible, puisque ses dérivées ou ses variations sont complétement inassignables, et cela pour toutes ses valeurs; le calcul différentiel n'a donc aucune prise sur elle. Mais il n'en est pas de même du calcul intégral.

En effet, l'existence d'une fonction discontinue de cette nature dans l'élément différentiel n'empêche pas une intégrale définie, simple ou multiple, d'avoir une valeur assignable. Dans cette circonstance, le signe de chaque intégration peut être regardé comme étant purement symbolique, ou comme indiquant la sommation à faire d'un nombre fini de termes, n, qui peut être considérable, ou petit, entre les limites données.

Autrement : les n quantités qu'il s'agit de sommer, appartenant à un même nombre n de valeurs particulières de la variable, seules *efficaces*, on peut partager l'intervalle compris entre les limites, en n parties correspondantes, et distribuer uniformément sur chacune d'elles la quantité appartenant à la seule valeur efficace qu'elle contient; puis, multipliant par la différentielle de la variable, indiquer ou même faire l'intégration. Le résultat sera évidemment égal à celui de la sommation directe des n quantités.

Cela posé, nous avons établi que dans un solide cristallin, si le point M du couple défini au § II occupe le centre de gravité d'une molécule intégrante, il y a lieu de considérer le coefficient F, pour le même ζ, comme variant avec (φ, ψ), ainsi que les limites (ζ_0, ζ_1). Or, lorsqu'il s'agit d'évaluer un flux élémentaire, ou d'effectuer les quatre sommations indiquées au § V, on peut admettre que les échanges de chaleur ne s'opèrent qu'entre les centres de gravité des molécules, ou bien considérer le facteur F, de l'expression (1), comme étant nul, tant que les éléments ϖ et ϖ' ne contiennent pas chacun l'un de ces centres de

gravité. Et, d'après ce qui vient d'être dit, quoique F soit alors complétement discontinu, la conductibilité angulaire $\mathcal{F}$ (6), ainsi que les coefficients ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Γ) (8), (α_i, β_i, γ_i) (9), et autres, resteront assignables.

§ XV.

JUSTIFICATION DU PRINCIPE.

Les formes de certains cristaux naturels, et entre autres la cristallisation tétraédrique, indiquent que la surface qui limite, ou la molécule intégrante, ou le système particulaire, n'a pas toujours l'*égalité symétrique*; c'est-à-dire que deux rayons vecteurs, menés du centre de gravité M à cette surface, dans deux directions opposées l'une à l'autre, ne sont pas égaux. De là résulte que le coefficient F, les limites (ζ_0, ζ_1), et conséquemment la conductibilité angulaire $\mathcal{F}$ (6), peuvent différer pour ces deux directions. Ce que semble confirmer l'électrisation par la chaleur de certains cristaux, due très-probablement à l'inégalité des conductibilités angulaires dans deux sens opposés. Ainsi les relations (14), et ensuite (13), n'ont pas nécessairement lieu.

En résumé, pour que la théorie actuelle embrasse tous les cas possibles, il faut et il suffit de considérer les neuf coefficients, (α_i, β_i, γ_i), des flux coordonnés (9), comme étant tous distincts et indépendants. Le principe posé au § II est donc justifié. Il ne présuppose aucune loi physique. Le seul fait qu'il emprunte à l'expérience, ou, si l'on veut, la seule hypothèse qu'il admette, peut s'énoncer ainsi : la quantité de chaleur échangée, dans un certain temps, entre deux points matériels, est d'autant plus grande, que leurs températures diffèrent davantage; l'échange étant nul s'ils ont même température.

Ce principe ne se prononce pas sur la nature de la cha-

leur, cette cause mystérieuse de la température. Il peut s'appliquer également aux diverses idées qu'on s'en peut faire : (fluide rayonnant, absorbé ou retenu par la matière pondérable; vibrations d'amplitudes variables, propagées par l'éther des systèmes particulaires; puissance vive de plusieurs rotations simultanées, constituant les molécules intégrantes, etc.). Il n'assigne pas la grandeur de certains nombres, tels que $\mathfrak{N}$, qui définit ζ_1, et n du § XIV, appliqué à la sommation (6) pour la conductibilité angulaire. Sont-ils considérables, comme le voulait Poisson? se réduisent-ils à 2, 3,..., au plus, comme nous le croyons? Peu lui importe. Seules, ses propres conséquences, rationnellement déduites, pourront aborder ces nombres inconnus, en établissant des lois que l'expérience vérifiera, et qui restreindront de plus en plus le champ qu'ils occupent.

§ XVI.

RECHERCHES DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

D'après les lois trouvées dans le cas de l'égalité symétrique, tous les systèmes de trois flux coordonnés (15), en un même point M, se déduiront d'un seul d'entre eux, qu'il suffira conséquemment de connaître. Il s'agit maintenant de constater que cette déduction se présente aussi dans le cas général, ou plus simplement, de trouver la relation qui fait dépendre un flux quelconque (8) des flux (9); puis de rechercher la loi qui régit les variations du même système de flux coordonnés, lorsqu'on passe du point M à un autre point voisin.

A cet effet, désignons généralement par

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_x\,dt\,(-\,\Omega_x),\\ \omega_y\,dt\,(-\,\Omega_y),\\ \omega_z\,dt\,(-\,\Omega_z),\end{array}\right.$$

les trois flux coordonnés, et par

(25) $$\omega\, dt(-\Omega),$$

le flux (8) correspondant à l'élément plan ω, situé sur le plan PP' dont la normale fait, avec les axes, les angles aux cosinus (m, n, p); Ω, ainsi que $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, seront des fonctions de (x, y, z), coordonnées du point M, qui occupe le centre de chacun des quatre éléments (ω_u, ω), et il s'agira d'établir la dépendance de ces fonctions et les lois qui les régissent.

Dans toutes les expressions précédemment trouvées du flux de chaleur correspondant à un élément-plan ω, les (x, y, z) que contiennent les dérivées de la température sont les coordonnées d'un point situé sur l'élément, à l'intérieur ou sur son périmètre, peu importe quand on ne considère que des quantités de l'ordre de grandeur de ces expressions. Bien que le choix soit alors indifférent, il convient cependant d'adopter exclusivement le centre de gravité de l'aire ω, pour le point dont il s'agit. On va voir que cette adoption permet de déduire d'une même recherche, ou d'une même équation, deux relations, la première entre plusieurs flux, la seconde entre leurs variations et d'autres quantités, d'un ordre de grandeur immédiatement inférieur; seconde relation qui autrement eût exigé une nouvelle recherche. Cette faculté d'extension paraît traduire d'une manière nouvelle les propriétés des centres de gravité.

§ XVII.

EMPLOI DU TÉTRAÈDRE.

Considérons un tétraèdre élémentaire, dont trois faces sont perpendiculaires aux axes, et la quatrième parallèle à PP'; le point M étant le sommet de son angle trièdre rectangle. Soient (A, B, C) les trois faces rectangulaires et Π

la face inclinée; un théorème sur la projection des aires donne

$$(26)\qquad A = m\Pi,\quad B = n\Pi,\quad C = p\Pi.$$

Soient (a, b, c) les trois côtés du tétraèdre parallèles aux axes, les coordonnées du centre de gravité M_1 de A seront

$$\left(x,\ y + \frac{b}{3},\ z + \frac{c}{3}\right),$$

celles du centre M_2 de B

$$\left(x + \frac{a}{3},\ y,\ z + \frac{c}{3}\right),$$

celles du centre M_3 de C

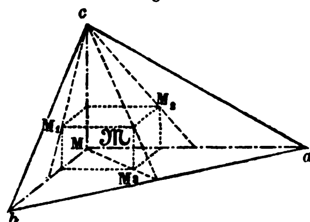
$$\left(x + \frac{a}{3},\ y + \frac{b}{3},\ z\right),$$

enfin les coordonnées du centre de gravité $\mathfrak{M}$ de Π seront

$$\left(x + \frac{a}{3},\ y + \frac{b}{3},\ z + \frac{c}{3}\right),$$

comme l'indique la *fig.* 3. Les (a, b, c) sont des infini-

Fig. 3.



ment petits du premier ordre, les (A, B, C, Π) des infiniment petits du second ordre, comme tout élément-plan ω.

De plus, soient désignées par les symboles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, ∂f les variations que subit toute fonction f de (x, y, z) appartenant au point M, lorsqu'on passe successivement

de ce point aux centres (M_i, $\mathfrak{M}$). (Ici les variations sont les rapports-limites définis au § VI, multipliés par le chemin parcouru.) D'après les expressions (24), (25), et les équations (26), les flux correspondants aux faces (A, B, C, Π) seront respectivement

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} m\Pi\, dt(-\Omega_x - \delta_1\Omega_x),\\ n\Pi\, dt(-\Omega_y - \delta_2\Omega_y),\\ p\Pi\, dt(-\Omega_z - \delta_3\Omega_z),\\ \Pi\, dt(-\Omega - \delta\Omega). \end{array}\right.$$

Les trois premiers entrent dans le tétraèdre, le quatrième en sort. Le gain de chaleur sera donc égal à l'excès de la somme des trois premiers flux (27) sur le dernier.

Or, ce gain élèvera la température du corps de $\frac{dV}{dt}dt$; il sera conséquemment égal à cette élévation, multipliée par le calorique spécifique Γ du milieu solide, par sa densité Δ, et par le volume $\frac{\Pi H}{3}$ du tétraèdre; H étant la perpendiculaire abaissée de M sur Π, laquelle est évidemment liée aux (a, b, c) par l'égalité multiple

$$(28)\qquad H = ma = nb = pc.$$

§ XVIII.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

Égalant les deux expressions trouvées du même gain de chaleur, on a définitivement, en supprimant les facteurs communs Π et dt, l'équation

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} m(-\Omega_x - \delta_1\Omega_x)\\ +n(-\Omega_y - \delta_2\Omega_y)\\ +p(-\Omega_z - \delta_3\Omega_z)\\ +(\Omega + \delta\Omega) \end{array}\right\} = \Gamma\Delta\frac{dV}{dt}\frac{H}{3},$$

qui donne d'abord, en négligeant les infiniment petits, δ_i et H, la relation entre quantités finies

$$(30) \qquad \Omega = m\Omega_x + n\Omega_y + p\Omega_z,$$

puis, qui se réduit, d'après cette relation même, à

$$(31) \qquad \delta\Omega - m\delta_1\Omega_x - n\delta_2\Omega_y - p\delta_3\Omega_z = \Gamma\Delta\,\frac{dV}{dt}\cdot\frac{H}{3}.$$

La relation (30) fait dépendre, d'une manière très-simple, la fonction Ω (25) des trois fonctions Ω_u (24), ou bien, un flux élémentaire quelconque, des trois flux coordonnés. La connaissance de ces derniers est donc seule nécessaire.

Il ne reste plus qu'à interpréter l'équation (31). La définition des symboles δ_i, les coordonnées des (M_i, $\mathfrak{M}$), et la valeur (30) de Ω, donnent

$$\delta_1\Omega_x = \frac{d\Omega_x}{dy}\frac{b}{3} + \frac{d\Omega_x}{dz}\frac{c}{3},$$

$$\delta_2\Omega_y = \frac{d\Omega_y}{dz}\frac{c}{3} + \frac{d\Omega_y}{dx}\frac{a}{3},$$

$$\delta_3\Omega_z = \frac{d\Omega_z}{dx}\frac{a}{3} + \frac{d\Omega_z}{dy}\frac{b}{a};$$

$$\delta\Omega = \left\{\begin{aligned} &\left(m\frac{d\Omega_x}{dx} + n\frac{d\Omega_y}{dx} + p\frac{d\Omega_z}{dx}\right)\frac{a}{3}\\ +&\left(m\frac{d\Omega_x}{dy} + n\frac{d\Omega_y}{dy} + p\frac{d\Omega_z}{dy}\right)\frac{b}{3}\\ +&\left(m\frac{d\Omega_x}{dz} + n\frac{d\Omega_y}{dz} + p\frac{d\Omega_z}{dz}\right)\frac{c}{3}.\end{aligned}\right.$$

Avec ces valeurs, le premier membre de (31) se réduit à

$$m\frac{d\Omega_x}{dx}\frac{a}{3} + n\frac{d\Omega_y}{dy}\frac{b}{3} + p\frac{d\Omega_z}{dz}\frac{c}{3};$$

or les produits (ma, nb, pc) sont tous égaux à H (28);

supprimant donc le facteur commun $\frac{H}{3}$, l'équation (31) devient définitivement

$$(32) \qquad \frac{d\Omega_x}{dx} + \frac{d\Omega_y}{dy} + \frac{d\Omega_z}{dz} = \Gamma\Delta\,\frac{dV}{dt}.$$

Cette équation (32) exprime la loi générale du mouvement de la chaleur dans le milieu solide; et, si la fonction V est indépendante du temps t, l'équation réduite

$$(33) \qquad \frac{d\Omega_x}{dx} + \frac{d\Omega_y}{dy} + \frac{d\Omega_z}{dz} = 0$$

exprime la loi de l'équilibre des températures, dans le même milieu à l'état *stationnaire*, ou *permanent*.

§ XIX.

EMPLOI DU PARALLÉLIPIPÈDE.

On arrive directement à l'équation générale (32), en considérant le parallélipipède rectangle élémentaire, aux côtés (dx, dy, dz), dont M est le sommet le plus voisin de l'origine. Soient (A, B, C) les trois faces du prisme, respectivement perpendiculaires aux (x, y, z), et qui forment le sommet M, (A′, B′, C′) les faces opposées; on aura

$$(34) \qquad \begin{cases} A = A' = dy\,dz, \\ B = B' = dz\,dx, \\ C = C' = dx\,dy. \end{cases}$$

Les flux élémentaires des faces (A, B, C) entrent dans le parallélipipède, ceux des faces (A′, B′, C′) en sortent.

L'excès du flux entrant par A sur celui sortant par A′ donnera un premier gain de chaleur. Pour l'évaluer, soient M_1 et M'_1 les centres des faces parallèles A et A′: δ_1 et δ'_1 les symboles des variations que subit une fonction de

(x, y, z) appartenant au point M, lorsqu'on passe successivement de ce point aux centres M_1 et M'_1. D'après la première expression (24), et les premières valeurs (34), l'excès dont il s'agit sera

$$dy\, dz\, dt\, (\delta'_1 \Omega_x - \delta_1 \Omega_x).$$

Or, la droite qui joint les centres M_1 et M'_1 étant parallèle aux x, et égale en grandeur à dx, les variations totales δ'_1 et δ_1 comprendront les mêmes variations partielles suivant les (y, z); δ_1 n'en aura pas d'autre, mais δ'_1 comprendra en outre la variation partielle suivant x; on aura donc

$$\delta'_1 \Omega_x - \delta_1 \Omega_x = \frac{d\Omega_x}{dx}\, dx;$$

et l'excès cherché est définitivement

$$\frac{d\Omega_x}{dx}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

On trouve, de la même manière, pour l'excès du flux entrant par B sur celui sortant par B'

$$\frac{d\Omega_y}{dy}\, dx\, dy\, dz\, dt;$$

et aussi, pour l'excès du flux entrant par C sur le flux sortant par C'

$$\frac{d\Omega_z}{dz}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

La somme de ces trois excès donne une première expression du gain total de chaleur, qui, occasionnant l'accroissement de température $\frac{dV}{dt}\, dt$, dans le prisme dont le calorique spécifique est Γ, la densité Δ, et le volume $dx\, dy\, dz$, a con-

séquemment pour seconde expression

$$r\Delta \frac{dV}{dt} \cdot dx\, dy\, dz\, dt.$$

Or, si l'on égale ces deux expressions, et qu'on supprime les quatre différentielles qui multiplient tous les termes, on retrouve définitivement l'équation (32), et sa réduite (33).

Cette coïncidence était nécessaire. Car la loi réelle qui régit les flux coordonnés lors de l'état stationnaire, ou qui donne l'échauffement successif des points du milieu, doit s'exprimer analytiquement de la même manière, quel que soit le polyèdre élémentaire que l'on considère pour l'établir. Et, quand deux polyèdres, aussi différents que le tétraèdre et le prisme rectangle, conduisent à la même loi, on ne peut plus douter de sa réalité.

Maintenant, si, pour abréger l'exposition de la théorie actuelle, on voulait employer un seul polyèdre élémentaire, et qu'il fallût choisir, entre le prisme rectangle, introduit par Fourier, et le tétraèdre, imaginé par Cauchy, c'est évidemment le dernier qu'il faudrait préférer. Car, outre l'équation générale (32), il établit la relation (30), au moins aussi importante, puisqu'elle fait dépendre tous les flux en un même point de trois seuls flux coordonnés. Avec le prisme rectangle, cette relation reste inaperçue; et, comme elle est essentielle, on n'éviterait pas un double emploi.

Si l'on se rappelle que les relations qui existent entre les forces élastiques, dans les milieux solides, ont été découvertes à l'aide du tétraèdre, on pensera que l'idée d'introduire ce polyèdre élémentaire, a peut-être contribué, plus que tout autre, aux progrès de la physique mathématique.

§ XX.

ÉQUATION A LA SURFACE.

Les fonctions Ω_u étant exprimées linéairement, à l'aide des dérivées premières de la fonction V, leur substitution, dans l'équation (32), la transforme en une équation aux différences partielles, linéaire et du second ordre, qui régit la température. Mais si l'on se propose d'intégrer cette équation générale, ou de déterminer la fonction V, dans le cas d'un corps solide de forme donnée, il faut connaître, et exprimer, la loi particulière des flux qui traversent la surface. Et c'est pour cela que la relation (30) est essentielle.

D'après la loi physique du rayonnement de la chaleur, si le corps est isolé dans une enceinte ayant une température fixe prise pour zéro, le flux de chaleur

$$\omega\, dt(-\Omega),$$

qui traverse, dans le temps dt, un élément ω de la surface, doit être égal à ωdt, multiplié par le pouvoir émissif ε de l'élément, et par l'excès de sa température actuelle V, sur celle zéro de l'enceinte, ou à

$$\omega\, dt\ \varepsilon V.$$

De là résulte l'équation, $\Omega + \varepsilon V = 0$, ou, d'après (30), celle-ci

$$(35) \qquad (m\Omega_x + n\Omega_y + p\Omega_z + \varepsilon V)_\sigma = 0,$$

laquelle n'a lieu que pour les points appartenant à la surface σ du corps. C'est-à-dire que, pour en faire usage, il faut substituer aux (x, y, z) les coordonnées de ces points

particuliers, dans V, dans ses dérivées qui composent les Ω_u, dans les fonctions (m, n, p) qui représentent les cosinus des angles que la normale extérieure fait avec les axes, et même dans ε si le pouvoir émissif est variable d'un point à un autre.

Ainsi, la fonction V devra vérifier l'équation générale (32) transformée, pour tous les points intérieurs au corps solide considéré, et l'équation (35), pour les seuls points appartenant à la surface σ. Les formes extrêmes de cette *équation* (35), dite *à la surface*, correspondent aux deux cas où le pouvoir émissif ε est infini, ou nul. Lors du premier, l'équation se réduit à

$$V_\sigma = 0;$$

c'est celle qu'il faut employer, quand le corps se refroidit dans un bain, entretenu à une température constante prise pour zéro. Lors du second cas, la même équation devient

$$(m\,\Omega_x + n\,\Omega_y + p\,\Omega_z)_\sigma = 0,$$

ou $\Omega_\tau = 0$, et exprime que le corps est disposé de telle sorte, qu'à toute époque, la température étant la même de part et d'autre de sa surface, aucun flux de chaleur ne la traverse.

§ XXI.

ÉQUATIONS LORS DES CORPS NON CRISTALLINS.

S'il s'agit d'un corps homogène non cristallin, ou de l'unique flux (23), les facteurs Ω_u sont

$$\Omega_u = q\,\frac{dV}{dx},$$

et si l'on pose, pour simplifier, le rapport

$$\frac{\Gamma\Delta}{q} = k, \tag{36}$$

l'équation générale (32) devient

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = k\frac{dV}{dt}. \tag{37}$$

Sous cette forme, qui reste la même pour tous les systèmes orthogonaux d'axes rectilignes, elle exprime la loi qui régit la fonction V de (x, y, z, t), lorsque le corps s'échauffe ou se refroidit.

On en déduit l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0, \tag{38}$$

pour exprimer la loi de l'équilibre des températures, lorsque le milieu est à l'état stationnaire, ou que V ne varie pas avec le temps.

Enfin, posant encore le rapport

$$\frac{\varepsilon}{q} = l, \tag{39}$$

l'équation à la surface (35) se présente sous la forme

$$\left(m\frac{dV}{dx} + n\frac{dV}{dy} + p\frac{dV}{dz} + lV\right)_\sigma = 0. \tag{40}$$

§ XXII.

ÉQUATIONS LORS DE L'ÉGALITÉ SYMÉTRIQUE.

Pour les flux coordonnés (15), les fonctions Ω_u sont

$$(41)\quad \begin{cases} \Omega_x = \alpha \dfrac{dV}{dx} + \nu \dfrac{dV}{dy} + \mu \dfrac{dV}{dz}, \\ \Omega_y = \nu \dfrac{dV}{dx} + \beta \dfrac{dV}{dy} + \lambda \dfrac{dV}{dz}, \\ \Omega_z = \mu \dfrac{dV}{dx} + \lambda \dfrac{dV}{dy} + \gamma \dfrac{dV}{dz}, \end{cases}$$

les axes étant quelconques, et l'équation générale (32) devient

$$(42)\quad \begin{cases} \alpha \dfrac{d^2V}{dx^2} + \beta \dfrac{d^2V}{dy^2} + \gamma \dfrac{d^2V}{dz^2} \\ + 2\lambda \dfrac{d^2V}{dydz} + 2\mu \dfrac{d^2V}{dzdx} + 2\nu \dfrac{d^2V}{dxdy} = \Gamma\Delta \dfrac{dV}{dt}. \end{cases}$$

Or, il résulte du § X, qu'il existe, dans le cas actuel, un système d'axes rectangulaires, et un seul, pour lequel les coefficients (λ, μ, ν) sont nuls. Alors, prenant ce système pour celui des (x, y, z), si l'on pose

$$(43)\quad \alpha = qa^2, \quad \beta = qb^2, \quad \gamma = qc^2,$$

afin de rappeler que ces trois coefficients, qui restent seuls, sont essentiellement positifs, les Ω_u (41) deviennent

$$(44)\quad \Omega_x = qa^2 \frac{dV}{dx}, \quad \Omega_y = qb^2 \frac{dV}{dy}, \quad \Omega_z = qc^2 \frac{dV}{dz}.$$

Par l'introduction du rapport k (36), l'équation (42) prend la forme

$$(45)\quad a^2 \frac{d^2V}{dx^2} + b^2 \frac{d^2V}{dy^2} + c^2 \frac{d^2V}{dz^2} = k \frac{dV}{dt};$$

et par celle du rapport l (39), l'équation à la surface est

$$(46) \qquad \left(ma^2 \frac{dV}{dx} + nb^2 \frac{dV}{dy} + pc^2 \frac{dV}{dz} + lV\right)_\tau = 0.$$

Dans les équations posées (43), q est la conductibilité constante d'un milieu homogène non cristallin, pris comme terme de comparaison; et, puisque les coefficients (α, β, γ) sont aussi des conductibilités, ou de même espèce que q, les (a^2, b^2, c^2) sont essentiellement de simples rapports, des nombres abstraits, ou sans dimensions géométriques. Lorsque les (a, b, c) deviennent égaux entre eux, et à l'unité, le cas actuel se confond avec le précédent.

TROISIÈME LEÇON.

ELLIPSOIDE PRINCIPAL.

Équation générale pour un milieu cristallisé quelconque. — Équation simplifiée, en coordonnées orthogonales, en coordonnées obliques. — Loi de l'ellipsoïde principal. — Axes déduits des diamètres conjugués. — Application au rhomboèdre, au prisme oblique symétrique.

---

§ XXIII.

ÉQUATIONS LORS DU CAS GÉNÉRAL.

S'il s'agit d'un milieu cristallin ne satisfaisant pas à l'égalité symétrique, dans les flux coordonnés (9), § VI, les fonctions Ω_u sont

(1)
$$\left\{\begin{aligned} \Omega_x &= \alpha \frac{dV}{dx} + \beta \frac{dV}{dy} + \gamma \frac{dV}{dz}, \\ \Omega_y &= \alpha_1 \frac{dV}{dx} + \beta_1 \frac{dV}{dy} + \gamma_1 \frac{dV}{dz}, \\ \Omega_z &= \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \beta_2 \frac{dV}{dy} + \gamma_2 \frac{dV}{dz}; \end{aligned}\right.$$

les trois coefficients $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$ étant essentiellement positifs, les six autres positifs ou négatifs. Avec ces valeurs l'équation (32), § XVIII, devient

(2)
$$\left\{\begin{aligned} &\alpha \frac{d^2V}{dx^2} + \beta_1 \frac{d^2V}{dy^2} + \gamma_2 \frac{d^2V}{dz^2} \\ &+ (\gamma_1 + \beta_2) \frac{d^2V}{dy\,dz} + (\alpha_2 + \gamma) \frac{d^2V}{dz\,dx} \\ &+ (\beta + \alpha_1) \frac{d^2V}{dx\,dy} = \Gamma\Delta \frac{dV}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit de rechercher s'il existe un système d'axes qui puisse simplifier cette équation.

Soient (x', y', z') de nouvelles coordonnées rectangulaires, liées aux (x, y, z) par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x' = mx + ny + pz, \\ y' = m'x + n'y + p'z, \\ z' = m''x + n''y + p''z. \end{cases}$$

Avec d'autres lettres désignant ses coefficients, l'équation (2) est la première du groupe suivant :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \dfrac{d^2V}{dx^2} + \mathcal{B} \dfrac{d^2V}{dy^2} + \Gamma \dfrac{d^2V}{dz^2} + 2\Delta \dfrac{d^2V}{dy\,dz} \\ \qquad + 2\mathcal{E} \dfrac{d^2V}{dz\,dx} + 2\mathcal{F} \dfrac{d^2V}{dx\,dy} \end{array} \right\} = \\ \left. \begin{array}{l} \mathcal{A}' \dfrac{d^2V}{dx'^2} + \mathcal{B}' \dfrac{d^2V}{dy'^2} + \Gamma' \dfrac{d^2V}{dz'^2} + 2\Delta' \dfrac{d^2V}{dy'\,dz'} \\ \qquad + 2\mathcal{E}' \dfrac{d^2V}{dz'\,dx'} + 2\mathcal{F}' \dfrac{d^2V}{dx'\,dy'} \end{array} \right\} = \end{array} \right\} \Gamma\Delta \frac{dV}{dt},$$

et doit donner, par transformation, la seconde du même groupe, dont les nouveaux coefficients dépendent des anciens.

La transformation s'opère à l'aide des expressions symboliques

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d.}{dx} = m \dfrac{d.}{dx'} + m' \dfrac{d.}{dy'} + m'' \dfrac{d.}{dz'}, \\ \dfrac{d.}{dy} = n \dfrac{d.}{dx'} + n' \dfrac{d.}{dy'} + n'' \dfrac{d.}{dz'}, \\ \dfrac{d.}{dz} = p \dfrac{d.}{dx'} + p' \dfrac{d.}{dy'} + p'' \dfrac{d.}{dz'}, \end{cases}$$

déduites des formules (3), et dont les carrés ainsi que les rectangles, étant développés, donnent les dérivées secondes en (x, y, z) à l'aide de celles en (x', y', z'), de la même

fonction V, que l'on place aux numérateurs après d^2. Substituant ces valeurs dans la première du groupe (4), et égalant le coefficient total de chacune des nouvelles dérivées à celui qui l'affecte dans la seconde du même groupe, on a les six relations

$$(6)\quad \begin{cases} \mathcal{A}' = m^2\mathcal{A} + n^2\mathcal{B} + p^2\Gamma + 2np\Delta + 2pm\mathcal{E} + 2mn\mathcal{F}, \\ \mathcal{B}' = m'^2\mathcal{A} + \ldots\ldots \qquad \Gamma' = m''^2\mathcal{A} + \ldots \\ \Delta' = m'm''\mathcal{A} + \ldots \qquad \mathcal{E}' = m''m\mathcal{A} + \ldots \\ \mathcal{F}' = \begin{cases} mm'\mathcal{A} + nn'\mathcal{B} + pp'\Gamma \\ + (np' + pn')\Delta + (pm' + mp')\mathcal{E} + (mn' + nm')\mathcal{F}. \end{cases} \end{cases}$$

(Les quatre intermédiaires, qui ne sont qu'indiquées, se déduisent facilement des deux extrêmes.)

Or, si l'on substitue les valeurs inverses

$$(7)\quad \begin{cases} x = mx' + m'y' + m''z', \\ y = nx' + n'y' + n''z', \\ z = px' + p'y' + p''z', \end{cases}$$

dans la première équation du groupe suivant :

$$(8)\quad \left.\begin{aligned} &\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta yz + 2\mathcal{E}zx + 2\mathcal{F}xy = \\ &\mathcal{A}'x'^2 + \mathcal{B}'y'^2 + \Gamma'z'^2 + 2\Delta'y'z' + 2\mathcal{E}'z'x' + 2\mathcal{F}'x'y' = \end{aligned}\right\} G,$$

on obtient la seconde, avec les nouveaux coefficients (6). Donc, inversement, pour transformer la première (4), on peut transformer la première (8), qui représente une surface du second ordre rapportée à son centre; et les coefficients de la seconde (8) donneront ceux de la seconde (4). De là résulte cette conséquence que, puisqu'il existe un système d'axes rectangulaires, et un seul, pour lequel le premier membre d'une des équations (8) se réduira à ses trois premiers termes, pour ce système il en sera de même d'une des équations (4), ou de l'équation (2).

§ XXIV.

ÉQUATION GÉNÉRALE SIMPLIFIÉE.

Prenant ce système particulier pour celui des (x, y, z), on aura nécessairement

$$(9)\qquad \gamma_1 = -\beta_2 = \lambda, \quad \alpha_2 = -\gamma = \mu, \quad \beta = -\alpha_1 = \nu;$$

en représentant, respectivement par (λ, μ, ν), les valeurs communes, positives ou négatives, de ces trois couples. Les Ω_u auront alors la forme

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_x &= \alpha \frac{dV}{dx} + \nu \frac{dV}{dy} - \mu \frac{dV}{dz}, \\ \Omega_y &= -\nu \frac{dV}{dx} + \beta_1 \frac{dV}{dy} + \lambda \frac{dV}{dz}, \\ \Omega_z &= \mu \frac{dV}{dx} - \lambda \frac{dV}{dy} + \gamma_2 \frac{dV}{dz}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit, soit directement par l'équation (32), § XVIII, soit par celle (2) réduite :

$$\alpha \frac{d^2V}{dx^2} + \beta_1 \frac{d^2V}{dy^2} + \gamma_2 \frac{d^2V}{dz^2} = \Gamma\Delta \frac{dV}{dt},$$

pour l'équation qui régit V ; et si l'on pose

$$(11)\qquad \alpha = qa^2, \quad \beta_1 = qb^2, \quad \gamma_2 = qc^2,$$

cette équation deviendra définitivement

$$(12)\qquad a^2 \frac{d^2V}{dx^2} + b^2 \frac{d^2V}{dy^2} + c^2 \frac{d^2V}{dz^2} = k \frac{dV}{dt},$$

en introduisant le rapport k (36), § XXI.

En résumé, dans le cas général, comme dans celui de l'égalité symétrique, il existe un système d'axes rectangulaires, et un seul, pour lequel l'équation générale a la forme

réduite. Mais ici chacune des fonctions Ω_{u} (10) contient les variations tangentielles de la température, en même temps que sa variation normale. De là résultent de nouvelles lois régissant les flux élémentaires, et qui seront établies dans les prochaines Leçons.

Les relations (6) sont identiquement les mêmes que celles qui existent entre les composantes normales et tangentielles des forces élastiques, exercées sur deux systèmes de plans coordonnés différents, dans un corps solide en équilibre d'élasticité, et d'où l'on déduit l'existence d'un seul système pour lequel les composantes tangentielles sont nulles. Cette coïncidence peut établir le théorème précédent dans le cas général, comme la coïncidence avec l'ellipsoïde central l'a établi dans le cas particulier du § X, et il en résulte une sorte de définition tout aussi simple, quoique différente, des coefficients ou des conductibilités ($\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$). Ainsi, dans son expansion actuelle, la théorie analytique de la chaleur se rapproche de la théorie dynamique des moments d'inertie par le cas de l'égalité symétrique, et de la théorie mathématique de l'élasticité par le cas général d'un milieu cristallin quelconque. Et ces rapprochements deviendront plus intimes encore dans les Leçons qui vont suivre.

§ XXV.

ÉQUATION EN COORDONNÉES OBLIQUES.

Lorsqu'un corps cristallisé est tel, que les trois conductibilités principales (qa^2, qb^2, qc^2) sont inégales, outre le système d'axes rectangulaires qui vient d'être défini, il existe une infinité d'axes obliques, pour lesquels l'équation générale se réduit à la forme (12). Il importe de constater cette propriété, la plus caractéristique peut-être des milieux cristallins.

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires du système précédent, (x', y', z') des coordonnées obliques qui

puissent donner identiquement

$$(13)\quad A^2\frac{d^2V}{dx'^2}+B^2\frac{d^2V}{dy'^2}+C^2\frac{d^2V}{dz'^2}=a^2\frac{d^2V}{dx^2}+b^2\frac{d^2V}{dy^2}+c^2\frac{d^2V}{dz^2},$$

avec de nouveaux coefficients (A^2, B^2, C^2) qu'il faudra déterminer.

Les formules actuelles

$$(14)\quad \begin{cases} x = mx' + m'y' + m''z', \\ y = nx' + n'y' + n''z', \\ z = px' + p'y' + p''z', \end{cases}$$

donnent le groupe symbolique

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d.}{dx'} = m\dfrac{d.}{dx} + n\dfrac{d.}{dy} + p\dfrac{d.}{dz}, \\ \dfrac{d.}{dy'} = m'\dfrac{d.}{dx} + n'\dfrac{d.}{dy} + p'\dfrac{d.}{dz}, \\ \dfrac{d.}{dz'} = m''\dfrac{d.}{dx} + n''\dfrac{d.}{dy} + p''\dfrac{d.}{dz}. \end{cases}$$

On en déduit les dérivées secondes de V en (x', y', z') à l'aide de celles en (x, y, z); et leur substitution dans le premier membre de l'équation (13) devant reproduire le second, il en résulte six équations de condition que l'on peut mettre sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{Am}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{Bm'}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{Cm''}{a}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{An}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{Bn'}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{Cn''}{b}\right)^2 = 1, \\ \left(\dfrac{Ap}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{Bp'}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{Cp''}{c}\right)^2 = 1; \\ \left(\dfrac{An}{b}\right)\left(\dfrac{Ap}{c}\right) + \left(\dfrac{Bn'}{b}\right)\left(\dfrac{Bp'}{c}\right) + \left(\dfrac{Cn''}{b}\right)\left(\dfrac{Cp''}{c}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{Ap}{c}\right)\left(\dfrac{Am}{a}\right) + \left(\dfrac{Bp'}{c}\right)\left(\dfrac{Bm'}{a}\right) + \left(\dfrac{Cp''}{c}\right)\left(\dfrac{Cm''}{a}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{Am}{a}\right)\left(\dfrac{An}{b}\right) + \left(\dfrac{Bm'}{a}\right)\left(\dfrac{Bn'}{b}\right) + \left(\dfrac{Cm''}{a}\right)\left(\dfrac{Cn''}{b}\right) = 0. \end{cases}$$

D'après les trois premières relations (16), les neuf parenthèses distinctes qui les composent, étant des quantités moindres que l'unité, désignent les cosinus des angles que font, avec les axes $(\overline{OX}, \overline{OY}, \overline{OZ})$, trois certaines droites $(\overline{OX''}, \overline{OY''}, \overline{OZ''})$; et, ces droites étant perpendiculaires entre elles, d'après les trois dernières (16), si l'on rapporte, au nouveau système d'axes rectangulaires qu'elles constituent, les anciens axes eux-mêmes, on pose immédiatement six relations inverses des précédentes, qui peuvent les remplacer, et que des réductions évidentes permettent d'écrire de la manière suivante :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 = \frac{1}{A^2},\\
&\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{p'}{c}\right)^2 = \frac{1}{B^2},\\
&\left(\frac{m''}{a}\right)^2 + \left(\frac{n''}{b}\right)^2 + \left(\frac{p''}{c}\right)^2 = \frac{1}{C^2};\\
&\frac{m'm''}{a^2} + \frac{n'n''}{b^2} + \frac{p'p''}{c^2} = 0,\\
&\frac{m''m}{a^2} + \frac{n''n}{b^2} + \frac{p''p}{c^2} = 0,\\
&\frac{mm'}{a^2} + \frac{nn'}{b^2} + \frac{pp'}{c^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

§ XXVI.

ELLIPSOIDE PRINCIPAL.

Or, ce groupe de relations (17) établit l'identité

$$(17\ bis)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} + \frac{z'^2}{C^2},$$

quand on y substitue, dans le premier membre, les valeurs (14). Ce qui donne, la condition nécessaire pour que

l'équation générale rapportée aux coordonnées obliques (x', y', z') ait la forme (12), ou bien la loi suivante.

Connaissant les conductibilités (qa^2, qb^2, qc^2), qui correspondent au système orthogonal unique, défini par le § XXIV; si l'on imagine un *ellipsoïde*, que nous appellerons *principal*, ayant ses axes parallèles aux (x, y, z), et de grandeurs proportionnelles aux racines carrées des trois conductibilités; tous les systèmes de diamètres conjugués de cet ellipsoïde, détermineront autant de systèmes de coordonnées obliques, pour lesquels l'équation générale aura la forme (12), et des coefficients proportionnels aux carrés de ces diamètres. Cette loi est générale. Elle embrasse évidemment le cas de l'égalité symétrique. Et lors des corps solides homogènes non cristallins, elle a encore lieu, car, l'ellipsoïde principal devenant une sphère, ses systèmes de diamètres conjugués sont tous rectangulaires.

De là résulte une conséquence importante. Certaines lois concernant la propagation de la chaleur dans les solides non cristallins, ayant été déduites de l'équation générale (37) § XXI, rapportée à des axes rectangulaires quelconques, si l'on se propose de rechercher ce que deviennent ces lois dans les milieux cristallisés, il faut prendre essentiellement la nouvelle équation générale

$$(18) \qquad A^2 \frac{d^2V}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2V}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2V}{dz'^2} = k\frac{dV}{dt},$$

rapportée à un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal. Car, choisir exclusivement le système des axes de cet ellipsoïde, ce serait la même chose que de rapporter l'ancienne équation à des axes rectangulaires spéciaux; les résultats que l'on obtiendrait ne seraient donc que particuliers. Et cette nouvelle équation générale (18), de la théorie analytique de la chaleur, s'étend à tous les

cristaux athermanes, quelles que soient leurs formes primitives adoptées.

D'après sa définition, l'ellipsoïde principal aura une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2,$$

r étant une ligne : car les (a^2, b^2, c^2) représentent les rapports $\left(\frac{\alpha}{q}, \frac{\beta_1}{q}, \frac{\gamma_2}{q}\right)$. Et, avec ces rapports eux-mêmes, l'équation précédente sera

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta_1} + \frac{z^2}{\gamma_2} = \frac{r^2}{q}.$$

La grandeur de la ligne r est d'ailleurs arbitraire.

§ XXVII.

FORMULES DES COORDONNÉES OBLIQUES.

Lorsque la forme primitive, d'un milieu cristallisé, est le parallélipipède obliquangle, ou l'une de ses variétés, il y a lieu de présumer que les arêtes de ce polyèdre forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, et sont proportionnelles en grandeur à ces mêmes diamètres. S'il en est ainsi, les axes principaux auront des directions correspondantes et assignables : et si ces directions théoriques coïncident avec celles que donnent des expériences directes, l'idée préconçue sera vérifiée. Ce qui conduit à résoudre cette question : déterminer les grandeurs et les directions des axes d'un ellipsoïde, lorsque l'on connaît les directions et les grandeurs de trois diamètres conjugués.

La solution de ce problème élémentaire commence par les formules du § XXV, et peut s'achever comme il suit.

Les cosinus $[m^{(j)}, n^{(j)} p^{(j)}]$ doivent vérifier les relations

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1,\\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1,\\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1;\\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= \cos\theta = \gamma,\\ m''m + n''n + p''p &= \cos\theta' = \gamma',\\ mm' + nn' + pp' &= \cos\theta'' = \gamma''; \end{aligned}\right.$$

où $(\theta, \theta', \theta'')$ sont les angles plans de l'angle trièdre formé par les diamètres conjugués. Les $\gamma^{(j)}$ étant les cosinus de ces angles plans, si l'on pose, en outre,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} 1 - \gamma^2 &= \sigma, & \gamma'\gamma'' - \gamma &= \tau,\\ 1 - \gamma'^2 &= \sigma', & \gamma''\gamma - \gamma' &= \tau',\\ 1 - \gamma''^2 &= \sigma''; & \gamma\gamma' - \gamma'' &= \tau''; \end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad 1 + 2\gamma\gamma'\gamma'' - \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = \varpi;$$

on reconnaît que ces fonctions des $\gamma^{(j)}$ vérifient les égalités multiples

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \sigma + \gamma''\tau'' + \gamma'\tau' &=\\ \gamma''\tau'' + \sigma' + \gamma\tau &=\\ \gamma'\tau' + \gamma\tau + \sigma'' &= \end{aligned}\right\} = \varpi;\\ &\sigma'\sigma'' - \tau^2 = \sigma''\sigma - \tau'^2 = \sigma\sigma' - \tau''^2 = \varpi;\\ &\frac{\tau'\tau'' - \sigma\tau}{\gamma} = \frac{\tau''\tau - \sigma'\tau'}{\gamma'} = \frac{\tau\tau' - \sigma''\tau''}{\gamma''} = \varpi; \end{aligned}\right.$$

qui conduisent aisément à l'équation dernière

$$(23)\quad \sigma\sigma'\sigma'' + 2\tau\tau'\tau'' - \sigma\tau^2 - \sigma'\tau'^2 - \sigma''\tau''^2 = \varpi^2.$$

Cette préparation faite, à l'aide des relations (19) on déduit des formules (14) le groupe intermédiaire

$$\begin{aligned} mx + ny + pz &= x' + \gamma''y' + \gamma'z',\\ m'x + n'y + p'z &= \gamma''x' + y' + \gamma z',\\ m''x + n''y + p''z &= \gamma'x' + \gamma y' + z'; \end{aligned}$$

puis ajoutant ces nouvelles formules, respectivement multipliées, par (σ, τ'', τ') une première fois, par (τ'', σ', τ) une seconde, par (τ', τ, σ'') une troisième, on isole successivement les (x', y', z') ; ce qui donne

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &(\sigma m + \tau'' m' + \tau' m'')x \\ +&(\sigma n + \tau'' n' + \tau' n'')y \\ +&(\sigma p + \tau'' p' + \tau' p'')z \end{aligned}\right\} = \varpi x', \\ &\left.\begin{aligned} &(\tau'' m + \sigma' m' + \tau m'')x \\ +&(\tau'' n + \sigma' n' + \tau n'')y \\ +&(\tau'' p + \sigma' p' + \tau p'')z \end{aligned}\right\} = \varpi y', \\ &\left.\begin{aligned} &(\tau' m + \tau m' + \sigma'' m'')x \\ +&(\tau' n + \tau n' + \sigma'' n'')y \\ +&(\tau' p + \tau p' + \sigma'' p'')z \end{aligned}\right\} = \varpi z', \end{aligned} \right.$$

d'après la valeur (21) et les égalités multiples (22).

§ XXVIII.

LES AXES DÉDUITS DES DIAMÈTRES.

D'un autre côté, les relations (17), qui expriment la vérification de l'identité (17 *bis*), donnent plus simplement

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x'}{A} &= \frac{Am}{a}\frac{x}{a} + \frac{An}{b}\frac{y}{b} + \frac{Ap}{c}\frac{z}{c}, \\ \frac{y'}{B} &= \frac{Bm'}{a}\frac{x}{a} + \frac{Bn'}{b}\frac{y}{b} + \frac{Bp'}{c}\frac{z}{c}, \\ \frac{z'}{C} &= \frac{Cm''}{a}\frac{x}{a} + \frac{Cn''}{b}\frac{y}{b} + \frac{Cp''}{c}\frac{z}{c}, \end{aligned} \right.$$

pour les seules valeurs admissibles des (x', y', z'). Et ces valeurs devant être les mêmes aux deux groupes (24) et (25), l'égalité nécessaire des coefficients de $(x, y,$ ou $z)$, de part et d'autre, conduit à neuf relations, que l'on peut concen-

trer dans le groupe suivant

$$(26)\quad \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\varpi}-\frac{A^2}{u^2}\right)q+\frac{\tau''}{\varpi}q'+\frac{\tau'}{\varpi}q''=0,\\ \frac{\tau''}{\varpi}q+\left(\frac{\sigma'}{\varpi}-\frac{B^2}{u^2}\right)q'+\frac{\tau}{\varpi}q''=0,\\ \frac{\tau'}{\varpi}q+\frac{\tau}{\varpi}q'+\left(\frac{\sigma''}{\varpi}-\frac{C^2}{u^2}\right)q''=0, \end{cases}$$

la lettre q étant successivement, ou m, ou n, ou p, tandis que u est respectivement, ou a, ou b, ou c.

Ce groupe (26) donne, par l'élimination des $q^{(j)}$, l'équation finale

$$(27)\quad \begin{cases} 0=\left(\frac{\sigma}{\varpi}-\frac{A^2}{u^2}\right)\left(\frac{\sigma'}{\varpi}-\frac{B^2}{u^2}\right)\left(\frac{\sigma''}{\varpi}-\frac{C^2}{u^2}\right)+2\frac{\tau\tau'\tau''}{\varpi^3}\\ -\frac{\tau^2}{\varpi^2}\left(\frac{\sigma}{\varpi}-\frac{A^2}{u^2}\right)-\frac{\tau'^2}{\varpi^2}\left(\frac{\sigma'}{\varpi}-\frac{B^2}{u^2}\right)-\frac{\tau''^2}{\varpi^2}\left(\frac{\sigma''}{\varpi}-\frac{C^2}{u^2}\right); \end{cases}$$

et on peut le remplacer par l'égalité multiple

$$(28)\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{A^2}{u^2}\tau+\gamma\right)q=\\ \left(\frac{B^2}{u^2}\tau'+\gamma'\right)q'=\\ \left(\frac{C^2}{u^2}\tau''+\gamma''\right)q''= \end{array}\right\}=\frac{\tau'\tau''q+\tau''\tau q'+\tau\tau'q''}{\varpi},$$

en s'aidant des dernières (22).

L'équation (27), développée, réduite par les relations (22) et (23), puis ordonnée en u^2, quand on a chassé les dénominateurs, devient

$$(29)\quad \begin{cases} u^6-(A^2+B^2+C^2)u^4\\ +(B^2C^2\sigma+C^2A^2\sigma'+A^2B^2\sigma'')u^2-A^2B^2C^2\varpi=0. \end{cases}$$

Étant du troisième degré en u^2, elle donne par ses racines les trois carrés (a^2, b^2, c^2) des axes cherchés. Enfin, sur

les sections principales de l'ellipsoïde, on doit avoir respectivement ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), ou

$$qx' + q'y' + q''z' = 0,$$

d'après les formules (14), ou encore

$$(30) \qquad \frac{x'}{A^2\tau + \gamma u^2} + \frac{y'}{B^2\tau' + \gamma' u^2} + \frac{z'}{C^2\tau'' + \gamma'' u^2} = 0,$$

d'après l'égalité multiple (28). Et, si l'on y substitue, successivement, à u^2 les trois racines obtenues (a^2, b^2, c^2), l'équation (30) donnera, en coordonnées obliques, les plans de ces sections principales. Ce qui complète la solution du problème posé. Par suite des proportionnalités supposées, et de l'homogénéité des équations (29) et (30), on peut substituer, aux carrés des diamètres conjugués, les coefficients mêmes du premier membre de l'identité (13), et les racines u^2 seront ceux du second membre.

§ XXIX.

APPLICATION AU RHOMBOÈDRE.

Appliquons cette solution générale à deux exemples particuliers. Lorsque la forme primitive du milieu cristallisé est un rhomboèdre, on a

$$(31) \qquad \begin{cases} C = B = A; & \varpi = 1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3; \\ \gamma'' = \gamma' = \gamma; & \tau'' = \tau' = \tau = \gamma^2 - \gamma. \end{cases}$$

Avec ces valeurs, l'équation finale (29) se réduit à

$$u^6 - 3A^2u^4 + 3A^4(1-\gamma^2)u^2 - A^6(1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 0,$$

et, en cherchant les facteurs de son premier membre, on parvient à la mettre sous la forme

$$[u^2 - A^2(1-\gamma)]^2[u^2 - A^2(1+2\gamma)] = 0,$$

ce qui donne immédiatement les racines

$$(32) \qquad a^2 = b^2 = A^2(1 - \gamma), \quad c^2 = A^2(1 + 2\gamma),$$

desquelles deux sont égales. L'ellipsoïde principal est donc de révolution.

D'après les valeurs actuelles (31), quand u^2 est c^2 (32), les dénominateurs sont tous $3A^2\gamma^2$, dans l'équation (30), qui se rédu ità

$$x' + y' + z' = 0.$$

C'est l'équation du plan perpendiculaire à la diagonale principale D du rhomboèdre; l'axe c est donc parallèle à cette diagonale. Quand u^2 est a^2 ou b^2 (32), les dénominateurs devenant zéro, l'équation (30) est indéterminée; mais si l'on remonte à l'égalité multiple (28), les trois premiers membres étant nuls, le quatrième doit l'être, et puisque les $\tau^{(i)}$ sont égaux, on a

$$q + q' + q'' = 0;$$

l'équation du plan de la section principale correspondante devient donc

$$q(x' - z') + q'(y' - z') = 0.$$

C'est celle d'un plan quelconque passant par la diagonale D, pour laquelle ($x' = y' = z'$), ou celle de tout plan méridien de l'ellipsoïde principal.

§ XXX.

ÉQUATIONS POUR LE RHOMBOÈDRE.

Ainsi, dans un milieu cristallin dont la forme primitive est un rhomboèdre, si les arêtes de ce polyèdre constituent un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, l'équation générale en V, étant rapportée aux coordonnées

obliques de ce système, sera

$$A^2\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}+\frac{d^2V}{dz'^2}\right)=k\frac{dV}{dt}:$$

et, si on la rapporte au système orthogonal des axes de l'ellipsoïde, elle deviendra

$$a^2\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)+c^2\frac{d^2V}{dz^2}=k\frac{dV}{dt}.$$

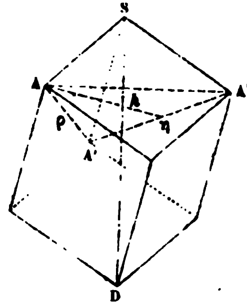
Les z sont parallèles à la diagonale D du rhomboèdre. Les coefficients a^2 et c^2 sont entre eux dans le rapport

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{1-\cos\theta}{1+2\cos\theta};$$

θ étant l'angle-plan du rhomboèdre, à son sommet équiangle.

Les axes (a, c) peuvent être définis géométriquement. Le plan mené par les secondes extrémités (A, A', A'') des trois arêtes égales formant le sommet équiangle S du rhomboèdre, en détache la pyramide régulière SAA′A″, dont la hau-

Fig. 4.



teur h est le tiers de D, et dont la base équilatérale a pour côté la diagonale ρ, opposée à l'angle θ sur une face primi-

4

tive. On a

$$\rho = 2 A \sin \frac{1}{2}\theta ; \quad A^2(1-\gamma) = \frac{\rho^2}{2} = a^2.$$

C'est-à-dire que l'axe a sera le côté d'un carré, ayant sa diagonale égale à ρ.

La hauteur η du triangle équilatéral $AA'A''$, est $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho$, ou $\sqrt{3}\, A \sin\frac{1}{2}\theta$; la projection du côté $\overline{SA}$ sur la base $AA'A''$, qui est $\frac{2}{3}\eta$, est donc égale à $\frac{2}{\sqrt{3}} A \sin\frac{1}{2}\theta$; et comme cette projection forme, avec la hauteur h de la pyramide, un triangle rectangle dont $\overline{SA} = A$ est l'hypoténuse, on a

$$h^2 = A^2\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{1}{2}\theta\right) = A^2\frac{(1+2\gamma)}{3}; \quad A^2(1+2\gamma) = \frac{D^2}{3} = c^2,$$

puisque h est le tiers de D. C'est-à-dire que l'axe c sera le côté d'un cube, ayant sa diagonale égale à D.

§ XXXI.

CAS DU PRISME OBLIQUE SYMÉTRIQUE.

Lorsque la forme primitive du milieu cristallin est un *prisme oblique,* à base *losange* et *symétrique,* c'est-à-dire tel, qu'un des plans diamétraux, passant par deux arêtes opposées, soit perpendiculaire au plan de la base : A étant le côté du losange, et C l'arête latérale, on a

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} B = A, \quad \gamma' = \gamma, \quad \sigma' = \sigma; \\ \tau' = \tau = \gamma(\gamma'' - 1), \quad \tau'' = \gamma^2 - \gamma''; \\ \varpi = \left\{\begin{array}{l} = 1 - 2\gamma^2 - \gamma''^2 + 2\gamma^2\gamma'', \\ = (1-\gamma'')(1+\gamma'' - 2\gamma^2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

L'équation (29) devient

$$u^6 - (2A^2 + C^2)u^4 + (2A^2C^2\sigma + A^4\sigma'')u^2 - A^4C^2\varpi = 0,$$

et, ses coefficients étant exprimés en γ'', on voit clairement que $[u^2 - A^2(1 - \gamma'')]$ divise son premier membre. Ce qui donne une première racine

$$(34) \qquad u^2 = A^2(1 - \gamma'') = a^2,$$

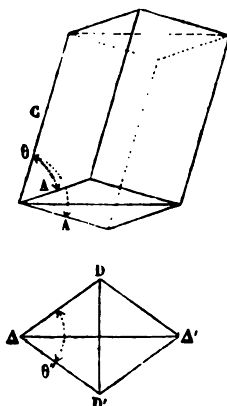
et réduit l'équation, ainsi divisée, à

$$(35) \qquad [u^2 - A^2(1 + \gamma'')](u^2 - C^2) = 2A^2C^2\gamma^2$$

pour les deux autres racines (b^2 et c^2).

Dans l'égalité multiple (28), si l'on prend $u^2 = a^2$ (34), les $q^{(i)}$ étant alors les cosinus $m^{(i)}$, les deux premiers membres s'annulent par le facteur commun $(A^2\tau + \gamma a^2)$, tandis que le facteur $(C^2\tau'' + \gamma'' a^2)$, au troisième membre, n'est pas nul. On doit donc avoir $m'' = 0$; et le quatrième membre devant pareillement s'annuler, se réduit à $m + m' = 0$, puisque $\tau' = \tau$. De là résulte que le plan,

Fig. 5.



auquel l'axe a doit être perpendiculaire, a pour équation

$x' = y'$, et n'est autre que le plan de symétrie. Si D représente ici la diagonale du losange opposée à son angle θ'', et qui est aussi perpendiculaire au plan de symétrie, on a

$$D = 2 A \sin \frac{1}{2} \theta''; \qquad A^2(1 - \gamma'') = \frac{D^2}{2} = a^2.$$

C'est-à dire que l'axe a sera le côté d'un carré, ayant D pour diagonale.

Dans le cas actuel, l'équation (30) prend la forme

$$(36) \quad [C^2\gamma^2 + (a^2 - C^2)\gamma''](x' + y') + \gamma[u^2 - A^2(1 - \gamma'')]z' = 0,$$

lorsqu'on chasse les dénominateurs, desquels deux sont égaux, et que l'on substitue aux $\tau^{(i)}$ leurs valeurs (33). Si, u^2 étant b^2 ou c^2, on multiplie l'équation (36) par $2A^2$, et qu'on remplace, dès l'abord, le produit $2A^2C^2\gamma^2$ ou le second membre de (35) par le premier, on pourra diviser par $[u^2 - A^2(1 - \gamma'')]$ devenu facteur commun; ce qui donnera

$$(36 \ bis) \qquad (u^2 - C^2)(x' + y') + 2A^2\gamma . z' = 0,$$

ou bien, multipliant cette dernière équation par

$$[u^2 - A^2(1 + \gamma'')],$$

remplaçant inversement le premier membre de (35) par le second, et divisant par $2A^2\gamma$, il viendra

$$(36 \ ter) \qquad C^2\gamma(x' + y') + [u^2 - A^2(1 + \gamma'')]z' = 0.$$

L'une ou l'autre de ces trois formes donnera, en coordonnées obliques, le plan de la section principale perpendiculaire à l'axe b ou c, quand on y substituera l'une des racines de l'équation (35). Et ce plan passera par la parallèle à la diagonale D, pour laquelle $(x' + y' = 0,\ z' = 0)$.

§ XXXII.

PRISME DROIT A BASE LOSANGE.

Particulièrement, lorsque γ est nul, la forme primitive est un prisme droit à base losange. L'axe a conserve sa valeur (34) ainsi que sa direction. Mais l'équation (35) devient

$$[u^2 - A^2(1+\gamma'')](u^2 - C^2) = 0,$$

et ses racines sont

$$(37) \qquad u^2 = A^2(1+\gamma'') = b^2, \quad u^2 = C^2 = c^2.$$

D'après (36 *bis*), l'axe b (37) est perpendiculaire au plan $x'+y'=0$; γ étant zéro, et $(u^2 - C^2)$ ne l'étant pas; c'est le plan, actuellement perpendiculaire à la base, mené par la diagonale D. Inversement, b est dirigé suivant la seconde diagonale Δ, bissectrice de l'angle θ'' du losange, et puisqu'on a

$$\Delta = 2A\cos\frac{1}{2}\theta'', \quad A^2(1+\gamma'') = \frac{\Delta^2}{2} = b^2,$$

cet axe b sera le côté d'un carré, ayant Δ pour diagonale. Enfin, d'après (36 *ter*) l'axe c (37) est perpendiculaire au plan $(z'=0)$; γ étant nul, et $[u^2 - A^2(1+\gamma'')]$ ne l'étant pas; c'est le plan de la base, comme on devait le trouver.

§ XXXIII.

ÉQUATIONS POUR LE PRISME SYMÉTRIQUE.

Généralement, pour un milieu cristallin dont la forme primitive est un prisme losange symétrique, si les arêtes de ce polyèdre constituent un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, l'équation qui régit la température

étant rapportée à ce système sera

$$A^2\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)+C^2\frac{d^2V}{dz'^2}=k\frac{dV}{dt};$$

et si on la rapporte au système des axes de l'ellipsoïde, elle deviendra

$$a^2\frac{d^2V}{dx^2}+b\frac{d^2V}{dy^2}+c^2\frac{d^2V}{dz^2}=k\frac{dV}{dt}.$$

Les x sont perpendiculaires au plan de symétrie. Les coefficients sont donnés par les relations

$$a^2=2A^2\sin^2\lambda,\qquad \left\{\begin{array}{c} b^2+c^2=C^2+2A^2\cos^2\lambda \\ b^2c^2=2C^2A^2(\cos^2\lambda-\cos^2\mu)\end{array}\right\},$$

λ étant l'angle que les côtés du losange font avec le plan de symétrie, et μ celui que ces deux premières arêtes font avec la troisième. Les deux dernières relations sont déduites de l'équation (35).

Dans les deux équations générales précédentes, ainsi que dans celles qui concernent le rhomboèdre, si l'on prend pour les coefficients, non les rapports des conductibilités correspondantes, à celle q prise comme terme de comparaison, mais les carrés des diamètres et des axes de l'ellipsoïde principal, comme le supposent les interprétations géométriques, il faut regarder la constante k comme étant égale au produit, du rapport (36), § XXI, par r^2, § XXVI.

QUATRIÈME LEÇON.

ELLIPSOIDE DES CONDUCTIBILITÉS.

Introduction des flux obliques. — Ellipsoïde représentatif des conductibilités. — Cas général de la cristallisation cubique. — Flux normal unique. — Axes de l'ellipsoïde des conductibilités. — Système unique d'axes obliques, commun aux deux ellipsoïdes.

---

§ XXXIV.

RAPPEL DES FLUX NORMAUX.

D'après le théorème établi au § XXIV, lorsqu'un milieu cristallin quelconque est rapporté aux axes de son ellipsoïde principal, les fonctions Ω_u correspondantes aux flux coordonnés, ont la forme

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Omega_x &= \alpha\frac{dV}{dx} + \nu\frac{dV}{dy} - \mu\frac{dV}{dz},\\
\Omega_y &= -\nu\frac{dV}{dx} + \beta\frac{dV}{dy} + \lambda\frac{dV}{dz},\\
\Omega_z &= \mu\frac{dV}{dx} - \lambda\frac{dV}{dy} + \gamma\frac{dV}{dz},
\end{aligned}
\right.
$$

(en supprimant les indices des (β_1, γ_2), qui sont ici sans utilité). Pour un flux élémentaire quelconque

$$
(2)\qquad \omega\, dt.(-\Omega),
$$

traversant dans le temps dt un élément plan ω, dont la normale fait avec les axes des angles aux cosinus (M, N, P), la

fonction Ω est

$$(3) \qquad \Omega = M\Omega_x + N\Omega_y + P\Omega_z,$$

d'après la loi du § XVIII.

Lorsqu'il s'agit d'un corps solide homogène non cristallin, tous les flux élémentaires ne contenant que la variation normale de la température, admettent l'expression

$$\omega\, dt \,.\, q \cdot \frac{V - V_n}{n};$$

n étant l'accroissement de la normale à l'élément ω; V la température au centre M de cet élément; V_n celle qui existe à l'extrémité de la très-petite ligne n; enfin q étant la conductibilité, alors constante. Les trois flux coordonnés principaux, dans les milieux cristallins possédant l'égalité symétrique, admettent encore la même expression, qui paraît exclue du cas général actuel.

§ XXXV.

INTRODUCTION DES FLUX OBLIQUES.

Mais on peut toujours mettre le flux élémentaire (2) sous la forme

$$(4) \qquad \omega\, dt \,.\, p \cdot \frac{V - V_l}{l};$$

l étant une ligne, très-courte ou insensible, partant de M dans une certaine direction, *oblique* à l'élément, et faisant avec les axes des angles aux cosinus (M', N', P'); V étant la température en M; V_l celle qui existe à l'extrémité M_l de la ligne l; enfin le coefficient p désignant la conductibilité résultante, rapportée à cette direction oblique.

En effet, les coordonnées de M étant (x, y, z), celles de M_l seront $(x + M'l,\ y + N'l,\ z + P'l)$, et la série de

Taylor, réduite à ses termes linéaires, par suite de l'extrême petitesse de l, donnera

$$(5)\qquad \frac{V - V_l}{l} = -M'\frac{dV}{dx} - N'\frac{dV}{dy} - P'\frac{dV}{dz};$$

et substituant cette valeur dans (4), puis Ω (3) avec les Ω_u (1) dans (2); égalant ensuite les deux expressions ainsi transformées, il faudra que l'on ait identiquement

$$(6)\quad M'\rho\frac{dV}{dx} + N'\rho\frac{dV}{dy} + P'\rho\frac{dV}{dz} = \begin{cases} (\alpha M - \nu N + \mu P)\dfrac{dV}{dx} \\ +(\nu M + \beta N - \lambda P)\dfrac{dV}{dy} \\ +(-\mu M + \lambda N + \gamma P)\dfrac{dV}{dz}, \end{cases}$$

ou que les quatre quantités introduites, le coefficient ρ et les cosinus (M', N', P'), vérifient les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} M'\rho = \xi = \alpha M - \nu N + \mu P, \\ N'\rho = \eta = \nu M + \beta N - \lambda P, \\ P'\rho = \zeta = -\mu M + \lambda N + \gamma P, \end{cases}$$

(ξ, η, ζ) représentant, pour simplifier, les coefficients des variations de V suivant (x, y, z), dans Ω (3) ou (6), lesquels coefficients ne contiennent que des quantités connues.

Or, les trois relations (7), jointes à cette quatrième

$$(8)\qquad M'^2 + N'^2 + P'^2 = 1,$$

donnent, sans ambiguïté, les valeurs réelles, admissibles et complétement déterminées,

$$(9)\qquad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad M' = \frac{\xi}{\rho},\quad N' = \frac{\eta}{\rho},\quad P' = \frac{\zeta}{\rho},$$

qui assignent le coefficient ρ, et la direction de la ligne l.

Il est donc bien vrai que le flux (2) peut toujours se mettre sous la forme (4) d'un *flux élémentaire oblique*.

§ XXXVI.

CONDUCTIBILITÉ DU FLUX OBLIQUE.

Ainsi, dans un milieu cristallin quelconque, tout flux élémentaire est proportionnel à la variation de la température, suivant une certaine ligne, en général oblique à l'élément. Et l'obliquité de cette ligne, ainsi que le coefficient de la variation, changent avec l'orientation de cet élément.

Le coefficient ρ, qui pour une même variation rend le flux d'autant plus intense, que sa valeur est plus grande, assigne réellement la conductibilité du milieu pour ce flux oblique. Nous le désignerons par le nom de *conductibilité,* sans épithète additionnelle. Mais, quoique chacune de ses valeurs corresponde à une direction déterminée, cette conductibilité proprement dite ne doit pas être confondue avec la conductibilité angulaire de notre Ire Leçon : car la fonction $\mathcal{F}(\varphi, \psi)$, § V, a la même valeur, pour une même direction, quel que soit le flux élémentaire qu'on évalue, tandis que la grandeur de ρ dépend essentiellement de l'orientation de l'élément ω. D'ailleurs, comme on le verra, les lois qui régissent ces deux conductibilités, peuvent être très-différentes dans le même milieu cristallin.

§ XXXVII.

ELLIPSOIDE DES CONDUCTIBILITÉS.

Si, pour chaque élément-plan, dont le centre est en M, on prend, sur la ligne l de son flux oblique, une longueur L,

proportionnelle au coefficient ρ qui lui correspond, les extrémités de toutes les lignes ainsi prises, formeront une certaine surface représentative des conductibilités. Il s'agit de trouver l'équation de cette surface.

L'origine des coordonnées étant transportée en M, et (x, y, z) représentant les projections sur les axes de la ligne L, ou les coordonnées de son extrémité mobile, on aura, d'après ces définitions, et les valeurs (9),

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} M' &= \frac{x}{L} = \frac{\xi}{\rho}, \\ N' &= \frac{y}{L} = \frac{\eta}{\rho}, \\ P' &= \frac{z}{L} = \frac{\zeta}{\rho}. \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut la proportion multiple

$$(11)\qquad \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z} = \frac{\rho}{L} = j,$$

j étant le rapport constant de la quantité ρ à la ligne L qui la représente. Ce qui donne les relations

$$\xi = jx, \quad \eta = jy, \quad \zeta = jz,$$

ou, en substituant aux (ξ, η, ζ) leurs valeurs (7),

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha M - \nu N + \mu P &= jx, \\ \nu M + \beta N - \lambda P &= jy, \\ -\mu M + \lambda N + \gamma P &= jz. \end{aligned} \right.$$

On isolera successivement les (M, N, P), en ajoutant ces relations (12), respectivement multipliées par les facteurs binômes de chacune des trois colonnes du tableau

suivant :

(13)

$\beta\gamma + \lambda^2$	$\lambda\mu - \nu\gamma$	$\nu\lambda + \mu\beta$
$\lambda\mu + \nu\gamma$	$\gamma\alpha + \mu^2$	$\mu\nu - \lambda\alpha$
$\nu\lambda - \mu\beta$	$\mu\nu + \lambda\alpha$	$\alpha\beta + \nu^2$

et, si l'on introduit les expressions

(14) $$\alpha\beta\gamma + \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 + \gamma\nu^2 = \mathrm{E},$$

(15) $$\begin{cases} (\beta\gamma + \lambda^2)x + (\lambda\mu + \nu\gamma)y + (\nu\lambda - \mu\beta)z = \mathrm{F}, \\ (\lambda\mu - \nu\gamma)x + (\gamma\alpha + \mu^2)y + (\mu\nu + \lambda\alpha)z = \mathrm{G}, \\ (\nu\lambda + \mu\beta)x + (\mu\nu - \lambda\alpha)y + (\alpha\beta + \nu^2)z = \mathrm{H}; \end{cases}$$

le résultat de cette opération sera

(16) $$\mathrm{EM} = j\mathrm{F}, \quad \mathrm{EN} = j\mathrm{G}, \quad \mathrm{EP} = j\mathrm{H}.$$

Or la somme des carrés des cosinus (M, N, P) doit être l'unité; on a donc nécessairement

(17) $$\mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2 + \mathrm{H}^2 = \frac{\mathrm{E}^2}{j^2},$$

et, avec les valeurs (15), cette équation (17) représente la surface cherchée. C'est un *ellipsoïde*, que nous appellerons *des conductibilités*, dont les axes diffèrent généralement, et par leurs directions, et par leurs grandeurs relatives, de ceux de l'ellipsoïde principal dont l'équation est

(18) $$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = \frac{r^2}{q}.$$

Lorsque le milieu cristallin possède l'égalité symétrique, les coefficients (λ, μ, ν) sont nuls, dans les Ω_u (1). Les expressions (14) et (15) se réduisent à

(19) $$\mathrm{E} = \alpha\beta\gamma; \quad \mathrm{F} = \beta\gamma x, \quad \mathrm{G} = \gamma\alpha y, \quad \mathrm{H} = \alpha\beta z;$$

et l'équation (17) devient

$$(20)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{1}{j^2}.$$

Alors l'ellipsoïde des conductibilités a ses axes dirigés comme ceux de l'ellipsoïde principal, mais de grandeurs proportionnelles aux carrés de ces derniers.

Remarquons ici que le rapport constant j (11) est en quelque sorte arbitraire, puisqu'il dépend de l'échelle qu'on adoptera pour l'ellipsoïde des conductibilités; échelle qui n'a aucune liaison nécessaire avec celle de l'ellipsoïde principal, et que définit la grandeur de la ligne r. Si l'on prenait $j=\frac{q}{r}$, r représenterait la conductibilité constante q; la conductibilité variable ρ étant représentée par L, on aurait la proportion très-lucide $\rho : q :: L : r$; le second membre de l'équation (20) devenant $\frac{r^2}{q^2}$, cette équation retrouverait l'homogénéité de celle (18); et d'autres simplifications résulteraient de ce choix. Mais, comme il n'a rien d'essentiel, nous laisserons le rapport j indéterminé, afin qu'il soit bien constaté que les lois qui régissent les conductibilités sont complétement indépendantes de sa détermination.

§ XXXVIII.

CAS GÉNÉRAL DE LA CRISTALLISATION CUBIQUE.

Si les trois coefficients (α, β, γ) sont égaux, l'ellipsoïde principal devient une sphère, ainsi que celui des conductibilités (20) lors de l'égalité symétrique. Mais, dans le cas général, quand $(\gamma=\beta=\alpha)$, sans que les (λ, μ, ν) soient nuls, l'ellipsoïde (17) n'est pas une sphère. En effet, les

expressions (14) et (15) deviennent

$$(21) \qquad E = \alpha(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2);$$

$$(22) \qquad \begin{cases} F = \lambda(\lambda x + \mu y + \nu z) + \alpha[\alpha x + (\nu y - \mu z)], \\ G = \mu(\lambda x + \mu y + \nu z) + \alpha[\alpha y + (\lambda z - \nu x)], \\ H = \nu(\lambda x + \mu y + \nu z) + \alpha[\alpha z + (\mu x - \lambda y)]. \end{cases}$$

Observant que les trois différences symétriques

$$(23) \qquad (\nu y - \mu x), \quad (\lambda z - \nu x), \quad (\mu x - \lambda y),$$

additionnées, après les avoir respectivement multipliées, soit par (λ, μ, ν), soit par (x, y, z), donnent zéro dans les deux cas, et que la somme des carrés de ces mêmes différences peut se mettre sous la forme

$$(24) \qquad (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2,$$

on reconnaît que les nouvelles expressions donnent, au premier membre de (17), la valeur

$$(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)[\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + (\lambda x + \mu y + \nu z)^2]$$

et, avec E^2 (21) au second membre, supprimant le facteur commun $(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$, il vient

$$(25) \qquad \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}{j^2},$$

équation qui représente encore un ellipsoïde.

La conductibilité ρ n'est donc pas constante. Puisque

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 = \frac{\rho^2}{j^2},$$

l'équation (25) montre que son maximum a lieu quand la ligne L est située dans le plan qui a pour équation

$$(26) \qquad \lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

et donne pour ce maximum

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Au contraire, ρ atteint son minimum quand L est perpendiculaire au plan (26) : car les (x, y, z), toujours proportionnels aux (M', N', P') d'après le groupe (10), le sont alors aux (λ, μ, ν); les différences (23) sont donc nulles, ainsi que la somme (24) de leurs carrés; c'est-à-dire que $(\lambda x + \mu y + \nu z)^2$ atteint précisément son maximum

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

qui, substitué dans (25), donne inversement le minimum $\rho = \alpha$. De là résulte que la surface (25) est un ellipsoïde de révolution planétaire, dont l'équateur est sur le plan (26), ou dont l'axe polaire est perpendiculaire à ce plan.

En résumé, dans un milieu cristallin dont la forme primitive est le cube, si l'égalité symétrique n'existe pas, la conductibilité ρ n'est pas constante pour toutes les directions. Ainsi la cristallisation cubique n'exclut pas les propriétés qui peuvent dépendre de l'existence des coefficients (λ, μ, ν), entre autres l'électrisation par la chaleur.

§ XXXIX.

RECHERCHE D'UN FLUX NORMAL.

Si l'ellipsoïde (17) donne la grandeur de la conductibilité ou du coefficient ρ, pour une direction donnée du flux oblique, il ne fait pas connaître celui des éléments plans, en M, que traverse ce flux. Cette connaissance exige une seconde recherche, qui fera l'objet de la prochaine Leçon. Mais on peut dès à présent chercher s'il existe un élément-plan pour lequel le flux est normal.

Les (M', N', P') étant alors respectivement égaux aux

(M, N, P), les équations (7) deviennent

$$(27)\quad \begin{cases} (\rho-\alpha)M+\nu N-\mu P=0, \\ -\nu M+(\rho-\beta)N+\lambda P=0, \\ \mu M-\lambda N+(\rho-\gamma)P=0, \end{cases}$$

et donnent, par l'élimination des (M, N, P), l'équation finale

$$(28)\quad (\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)+\lambda^2(\rho-\alpha)+\mu^2(\rho-\beta)+\nu^2(\rho-\gamma)=0,$$

qui, étant du troisième degré, et ayant son dernier terme (— E) (14) essentiellement négatif, montre que la propriété du flux normal appartiendra à trois éléments-plans au plus et à un seul au moins.

Lors de l'égalité symétrique, les (λ, μ, ν) sont nuls; l'équation (28) se réduit à son premier produit; ses trois racines sont réelles, positives et égales à (α, β, γ); les relations (27) étant alors

$$(\rho-\alpha)M=0, \quad (\rho-\beta)N=0, \quad (\rho-\gamma)P=0,$$

exigent l'annulation de N et P si $\rho=\alpha$, de P et M si $\rho=\beta$, de M et N si $\rho=\gamma$. Les trois seuls plans aux flux normaux sont donc ceux des sections principales de l'ellipsoïde (18); ce que l'on savait d'ailleurs.

Dans le cas du paragraphe précédent, où $(\gamma=\beta=\alpha)$ sans que les (λ, μ, ν) soient nuls, l'équation (28) devient

$$(\rho-\alpha)[(\rho-\alpha)^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2]=0,$$

et n'a qu'une seule racine réelle, $\rho=\alpha$, laquelle est précisément la conductibilité minimum. Pour cette unique valeur, les relations (27) donnent

$$\frac{M}{\lambda}=\frac{N}{\mu}=\frac{P}{\nu}.$$

C'est-à-dire que le plan (26), ou celui de l'équateur de

l'ellipsoïde (25), est seul traversé par un flux normal. Toutes les autres valeurs de ρ, surtout la valeur maximum dirigée dans le plan même de l'équateur, appartiennent à des flux obliques.

Ainsi, dans un milieu cristallin ne possédant pas l'égalité symétrique, il peut se faire qu'il n'existe qu'un seul système de plans parallèles, pour lequel le flux soit normal. Cet unique système se confond-il avec le seul plan de clivage que présentent tant de cristaux naturels? L'expérience pourra seule répondre à cette question.

§ XL.

AXES DE L'ELLIPSOIDE DES CONDUCTIBILITÉS.

Pour compléter l'étude de l'ellipsoïde (17), il convient de déterminer ses axes, ou les trois coefficients principaux des flux obliques. Soit u la valeur d'un de ces coefficients, $\frac{u}{j}$ sera l'axe qui le représente. Le sommet S correspondant est un point aux coordonnées (x, y, z), commun à l'ellipsoïde (17) et à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{u^2}{j^2}. \tag{29}$$

De plus ces deux surfaces doivent avoir même plan tangent en S; ce qui exige que l'on ait

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} (\beta\gamma + \lambda^2)\,F + (\lambda\mu - \nu\gamma)\,G + (\nu\lambda + \mu\beta)\,H &= \mathfrak{K}x, \\ (\lambda\mu + \nu\gamma)\,F + (\gamma\alpha + \mu^2)\,G + (\mu\nu - \lambda\alpha)\,H &= \mathfrak{K}y, \\ (\nu\lambda - \mu\beta)\,F + (\mu\nu + \lambda\gamma)\,G + (\alpha\beta + \nu^2)\,H &= \mathfrak{K}z. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient $\mathfrak{K}$, d'abord indéterminé, s'obtient en sommant les relations (30), respectivement multipliées par

qu'on y substituera, successivement, les trois racines u^2 de l'équation (35). Et les axes de l'ellipsoïde (17) seront ainsi déterminés, tant en direction qu'en grandeur.

§ XLI.

SOLUTIONS PARTICULIÈRES.

Dans le cas de l'égalité symétrique, les (λ, μ, ν) étant zéro, les τ_i sont nuls, les $\mathfrak{N}_i$ se réduisent respectivement à $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, qui sont alors les trois racines de l'équation (35), le groupe (34) devenant

$$(u^2 - \alpha^2)x = 0, \quad (u^2 - \beta^2)y = 0, \quad (u^2 - \gamma^2)z = 0,$$

exige l'annulation de y et z si $u^2 = \alpha^2$, de z et x si $u^2 = \beta^2$, de x et y si $u^2 = \gamma^2$. Et S vient occuper successivement les sommets de l'ellipsoïde (20).

Dans le cas du § XXXVIII, où $(\gamma = \beta = \alpha)$ sans que les (λ, μ, ν) soient nuls, les $(\mathfrak{N}_i, \tau_i)$ se réduisent à

$$(38) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}_1 = \sigma^2 - \lambda^2, & \mathfrak{N}_2 = \sigma^2 - \mu^2, & \mathfrak{N}_3 = \sigma^2 - \nu^2, \\ \tau_1 = \mu\nu, & \tau_2 = \nu\lambda, & \tau_3 = \lambda\mu, \end{cases}$$

en posant, dans un but de simplification,

$$(39) \qquad \alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \sigma^2.$$

L'équation (35), transformée par ces valeurs, et développée suivant les puissances de $(u^2 - \sigma^2)$, se réduit à

$$(40) \qquad (u^2 - \alpha^2)(u^2 - \sigma^2)^2 = 0.$$

Deux racines étant égales, l'ellipsoïde est de révolution ; et, la racine inégale étant la plus petite, l'ellipsoïde est planétaire. Avec les valeurs (38), l'égalité multiple (36), entre

les coordonnées d'un sommet S, devient

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}(\sigma^2-u^2)\frac{x}{\lambda}&=\\(\sigma^2-u^2)\frac{y}{\mu}&=\\(\sigma^2-u^2)\frac{z}{\nu}&=\end{aligned}\right\}=\lambda x+\mu y+\nu z.$$

L'équation (37) des sections principales se réduit à

$$(42)\qquad \frac{\lambda X+\mu Y+\nu Z}{\sigma^2-u^2}=0,$$

quand $u^2=\alpha^2$, et donne

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z=0$$

pour le plan de l'équateur qui est perpendiculaire au petit axe $\frac{\alpha}{j}$. Quand $u^2=\sigma^2$, elle est indéterminée, mais alors le groupe (41) donne l'unique équation

$$\lambda x+\mu y+\nu z=0,$$

et dit que tout point du cercle équatorial est un sommet S pour le grand axe $\frac{\sigma}{j}$.

§ XLII.

CONCOURS DES DEUX ELLIPSOIDES.

Enfin, il reste à résoudre un dernier problème, appartenant encore à la théorie des surfaces du second ordre. Il s'agit de savoir s'il existe un système d'axes obliques, par lequel l'ellipsoïde principal et celui des conductibilités se trouvent tous deux rapportés à des diamètres conjugués.

On peut s'appuyer sur un théorème d'analyse, qui résulte d'une recherche précédente, et dont voici l'énoncé :

Théorème. Si, avec les six quantités de même espèce

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A}, & \mathcal{B}, & \Gamma, \\ \Delta, & \mathcal{E}, & \mathcal{F}, \end{array} \right.$$

et le système indéterminé

$$(s) \quad \left\{ \begin{array}{lll} M, & M', & M'', \\ N, & N', & N'', \\ P, & P', & P'', \end{array} \right.$$

de neuf coefficients, vérifiant les six relations

$$(s') \quad \left\{ \begin{array}{ll} M^2 + M'^2 + M''^2 = 1, & M'M'' + N'N'' + P'P'' = 0, \\ N^2 + N'^2 + N''^2 = 1, & M''M + N''N + P''P = 0, \\ P^2 + P'^2 + P''^2 = 1, & MM' + NN' + PP' = 0, \end{array} \right.$$

on compose un nouveau groupe

$$(a') \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A}', & \mathcal{B}', & \Gamma', \\ \Delta', & \mathcal{E}', & \mathcal{F}', \end{array} \right.$$

à l'aide des six relations

$$(a'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}' = M^2\mathcal{A} + N^2\mathcal{B} + P^2\Gamma + 2NP\Delta + 2PM\mathcal{E} + 2MN\mathcal{F}, \\ \mathcal{B}' = M'^2 A + \ldots, \qquad \Gamma' = M''^2\mathcal{A} + \ldots, \\ \Delta' = M'M''\mathcal{A} + \ldots, \qquad \mathcal{E}' = M''M\mathcal{A} + \ldots, \\ \mathcal{F}' = \left\{ \begin{array}{l} MM'\mathcal{A} + NN'\mathcal{B} + PP'\Gamma \\ + (NP' + PN')\Delta + (PM' + MP')\mathcal{E} + (MN' + NM')\mathcal{F}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

le nombre des systèmes indéterminés [(s), (s')] étant infini, on aura pareillement un nombre infini de groupes [(a'), (a'')]; mais *il existe un système* [(s), (s')], *et un seul, pour lequel les* (Δ', $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$) *du groupe* [(a'), (a'')] *sont nuls.*

Ce théorème est un corollaire évident de la proposition établie au § XXIII, et qui pourrait être empruntée, soit

directement à la théorie des surfaces du second ordre, soit à celle des moments d'inertie, soit à celle de l'élasticité.

§ XLIII.

AXES OBLIQUES COMMUNS.

Cela posé, l'ellipsoïde principal est donné par l'équation

$$(43)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2,$$

et l'ellipsoïde des conductibilités par celle-ci :

$$(44)\qquad F^2+G^2+H^2=\frac{E^2}{j^2},$$

où les (F, G, H) sont de la forme

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} F &= Q\,x + R\,y + T\,z,\\ G &= Q'x + R'y + T'z,\\ H &= Q''x + R''y + T''z.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs (14), § XXV, des coordonnées rectangulaires (x, y, z) en coordonnées obliques (x', y', z'), substituées dans l'équation (43), rapporteront l'ellipsoïde principal à des diamètres conjugués (A, B, C), si les $(m^{(j)}, n^{(j)}, p^{(j)})$ vérifient les six relations (16), § XXV, inverses des six équations (17) du même paragraphe. Et si l'on substitue les mêmes valeurs dans les (F, G, H) (45), il faudra que les coefficients des termes rectangles $(y'z', z'x', x'y')$ soient nuls dans l'équation (44) transformée, pour que l'ellipsoïde des conductibilités se trouve aussi rapporté à des diamètres conjugués. Ce qui donnera trois nouvelles équations, à joindre aux six équations (16), § XXV, pour déterminer les neuf cosinus $(m^{(j)}, n^{(j)}, p^{(j)})$. Or cette dé-

termination est toujours possible, et ne donne qu'une seule solution.

En effet, si l'on pose

$$\frac{Am}{a} = M, \quad \frac{Bm'}{a} = M', \quad \frac{Cm''}{a} = M'',$$
$$\frac{An}{b} = N, \quad \frac{Bn'}{b} = N', \quad \frac{Cn''}{b} = N'',$$
$$\frac{Ap}{c} = P, \quad \frac{Bp'}{c} = P', \quad \frac{Cp''}{c} = P'',$$

les équations (16), § XXV, deviennent les six équations (s') du théorème précédent, et si l'on pose encore

$$a^2(Q^2 + Q'^2 + Q''^2) = \mathcal{A},$$
$$b^2(R^2 + R'^2 + R''^2) = \mathcal{B},$$
$$c^2(T^2 + T'^2 + T''^2) = \Gamma,$$
$$bc(RT + R'T' + R''T'') = \Delta,$$
$$ca(TQ + T'Q' + T''Q'') = \mathcal{E},$$
$$ab(QR + Q'R' + Q''R'') = \mathcal{F},$$

on reconnaît qu'en introduisant divers facteurs, les trois nouvelles équations expriment que les (Δ', $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$) du groupe [(a'), (a'')] doivent être nuls. Or, il existe un système des ($M^{(j)}$, $N^{(j)}$, $P^{(j)}$), et un seul, qui remplit cette condition : il existera donc conséquemment un système des ($m^{(j)}$, $n^{(j)}$, $p^{(j)}$) qui résoudra le problème posé.

§ XLIV.

SUR L'ORIGINE DES FORMES PRIMITIVES.

En résumé, dans un milieu cristallin quelconque, qui ne satisfait pas à l'égalité symétrique, parmi tous les systèmes d'axes obliques qui conservent à l'équation générale de la chaleur la forme (12), § XXIV, il en existe un, et un

seul, par lequel l'ellipsoïde des conductibilités est rapporté à des diamètres conjugués, comme l'ellipsoïde principal.

Lorsque la forme primitive du milieu cristallin est le parallélipipède obliquangle ou l'une de ses variétés, si, comme le supposent les applications qui terminent la Leçon précédente, les arêtes de ce polyèdre forment un des systèmes de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, ce système unique, préféré par la nature entre une infinité d'autres, peut être celui-là même pour lequel existe la coïncidence qui vient d'être définie. Double prévision que des expériences directes et de nouvelles conséquences de la théorie actuelle de la chaleur pourraient seules confirmer.

S'il en était ainsi, le cas de l'égalité symétrique appartiendrait exclusivement aux milieux cristallisés dont la forme primitive est le parallélipipède rectangle; puisque la coïncidence dont il s'agit n'a lieu que pour le seul système des axes rectangulaires de l'ellipsoïde principal et de l'ellipsoïde des conductibilités (20). Et, dans le cas du § XXXVIII, un des côtés du cube primitif serait perpendiculaire au plan (26) de l'équateur, auquel les deux autres côtés seraient parallèles; car la sphère, qui remplace ici l'ellipsoïde principal, n'a pas de diamètres conjugués obliques.

On remarquera que l'extension actuelle de la théorie mathématique de la chaleur, aux milieux cristallins, n'exige pas l'intervention d'une haute analyse, puisque l'étude des lois qui régissent la conductibilité se confond avec celle des surfaces du second ordre. Cette circonstance fortuite, ou plutôt non cherchée, cette simplicité élémentaire de l'instrument employé, laquelle était devenue si rare dans les applications, me paraît constater, à elle seule, la réalité de la nouvelle théorie. Car, dussé-je être accusé de fatalisme,

j'avoue ici la ferme croyance que les lois naturelles, qui nous sont inconnues, sont d'une telle simplicité, que les vérités mathématiques les plus vulgaires suffiront pour les établir, et qu'il ne sera nécessaire de recourir à toute la puissance de l'analyse, que pour expliquer les perturbations.

CINQUIÈME LEÇON.

LOIS DE LA CONDUCTIBILITÉ.

Obliquité et conductibilité du flux, pour un élément-plan donné. — Lois, lors de l'égalité symétrique. — Lignes représentatives. — Lois, lors du cas général. — Symétrie de la conductibilité. — Lois des flux coordonnés, lors des axes obliques.

---

§ XLV.

PROBLÈME DES FLUX OBLIQUES.

La recherche de l'élément-plan ω, traversé par le flux oblique, correspondant à l'un des rayons L de l'ellipsoïde (17), § XXXVII, se réduit à déterminer les cosinus (M, N, P) assignant la normale à ω, lorsqu'on connaît les cosinus

$$(1) \qquad M' = \frac{x}{L}, \quad N' = \frac{y}{L}, \quad P' = \frac{z}{L},$$

appartenant à la ligne L.

Ou bien, inversement, si l'on détermine les (M', N', P') à l'aide des (M, N, P), on en conclura la direction et la grandeur du rayon L de l'ellipsoïde des conductibilités; c'est-à-dire la direction du flux oblique qui traverse l'élément donné, et la grandeur correspondante du coefficient ρ.

La solution d'un seul de ces deux problèmes suffira pour établir la liaison qui existe entre les conductibilités ρ et les éléments-plans ω.

§ XLVI.

LOIS LORS DE L'ÉGALITÉ SYMÉTRIQUE.

Résolvons le premier problème dans le cas particulier de l'égalité symétrique ou de l'ellipsoïde des conductibilités :

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{1}{j^2}.$$

Les (λ, μ, ν) étant nuls, les équations (7), § XXXV, rapprochées des relations (1), donnent immédiatement

$$(3)\qquad M=\frac{jx}{\alpha},\quad N=\frac{jy}{\beta},\quad P=\frac{jz}{\gamma};$$

et l'équation du plan cherché est

$$(4)\qquad \frac{xX}{\alpha}+\frac{yY}{\beta}+\frac{zZ}{\gamma}=0$$

[(X, Y, Z) étant les coordonnées courantes rapportées à l'origine M]. Pour interpréter cette équation, soit L_1 la distance MM_1 qui sépare M du point M_1, aux cordonnées (x_1, y_1, z_1) où la droite L perce l'ellipsoïde principal :

$$(5)\qquad \frac{X^2}{\alpha}+\frac{Y^2}{\beta}+\frac{Z^2}{\gamma}=\frac{r^2}{q};$$

le plan tangent en M_1 à cet ellipsoïde est donné par l'équation

$$\frac{x_1X}{\alpha}+\frac{y_1Y}{\beta}+\frac{z_1Z}{\gamma}=\frac{r^2}{q},$$

ou bien, puisque l'on a les proportions

$$(6)\qquad \frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}=\frac{z_1}{z}=\frac{L_1}{L},$$

par celle-ci :

$$(7) \qquad \frac{xX}{\alpha} + \frac{yY}{\beta} + \frac{zZ}{\gamma} = \frac{Lr^2}{L_1 q};$$

et le plan (4) lui est parallèle.

Ainsi, dans le cas actuel, quand on connaît la direction d'un flux oblique et son coefficient ρ, ou bien la direction et la grandeur d'un rayon vecteur L de l'ellipsoïde (2), qui perce en M_1 l'ellipsoïde (5), on aura le plan ω, traversé par ce flux oblique, en le menant parallèle au plan tangent de l'ellipsoïde principal en M_1.

Passons à la solution du problème inverse. Si l'on désigne par p_1 la perpendiculaire abaissée de M sur le plan (7), une formule connue donne

$$p_1 = \frac{\left(\frac{Lr^2}{L_1 q}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}}};$$

et, puisque les (x, y, z) vérifient l'équation (2), le dénominateur de la valeur précédente étant remplacé par $\frac{1}{j}$, et jL par ρ, on a

$$(8) \qquad \rho = \frac{p_1 L_1}{r^2} q.$$

Ainsi, lors de l'égalité symétrique, pour déterminer la direction du flux oblique qui doit traverser un élément ω donné, et aussi la grandeur du coefficient ρ correspondant, on mènera à l'ellipsoïde principal un plan tangent parallèle à ω; le rayon vecteur $L_1 = \overline{MM_1}$, allant au point de contact M_1 donnera la direction du flux; et le produit de ce rayon vecteur L_1, par la perpendiculaire p_1 abaissée de M sur ce plan tangent, donnera le coefficient ρ, en multipliant ce produit par q et le divisant par r^2.

Particulièrement, si l'élément ω est sur l'une des sections principales de l'ellipsoïde (5), la perpendiculaire p_1 et le rayon vecteur L_1 se confondent et ont même grandeur; leur produit devient, ou $\frac{\alpha r^2}{q}$, ou $\frac{\beta r^2}{q}$, ou $\frac{\gamma r^2}{q}$, d'après l'équation (5), et ρ (8) est égal, ou à α, ou à β, ou à γ.

Si l'on substitue dans les équations (3), aux (x, y, z), leurs valeurs en (x_1, y_1, z_1) déduites des proportions (6); que l'on remplace jL par ρ, puis ρ par sa valeur (8); on a définitivement

$$(9) \qquad \alpha M = q\frac{p_1 x_1}{r^2}, \quad \beta N = q\frac{p_1 y_1}{r^2}, \quad \gamma P = q\frac{p_1 z_1}{r^2},$$

équations qui expriment tout simplement les cosinus (M, N, P) des angles que fait, avec les axes, la perpendiculaire abaissée sur un plan tangent à l'ellipsoïde principal, à l'aide de cette perpendiculaire même et des coordonnées du point de contact, sans qu'il y reste rien de ce qui se rapporte au cas de l'égalité symétrique.

§ XLVII.

RETOUR AU CAS GÉNÉRAL.

Or, dans le cas de l'ellipsoïde des conductibilités (17), § XXXVII, l'ellipsoïde principal est encore représenté par l'équation (5), puisque les indices des (β_1, γ_2) sont supprimés. Donc, si l'on veut résoudre le second problème dans le cas général, c'est-à-dire déterminer la direction du flux oblique, et le coefficient ρ, pour l'élément ω parallèle au même plan tangent du même ellipsoïde principal (5), on pourra substituer aux termes $(\alpha M, \beta N, \gamma P)$ des équations (7), § XXXV, les valeurs (9); ce qui les transfor-

mera ainsi :

$$(10)\qquad \begin{cases} M'\rho = q\dfrac{p_1 x_1}{r^2} + (P\mu - N\nu), \\ N'\rho = q\dfrac{p_1 y_1}{r^2} + (M\nu - P\lambda), \\ P'\rho = q\dfrac{p_1 z_1}{r^2} + (N\lambda - M\mu). \end{cases}$$

Et ce sont ces trois équations (10), jointes à la quatrième

$$(11)\qquad M'^2 + N'^2 + P'^2 = 1,$$

qui détermineront les (M', N', P') et ρ, que l'on cherche.

Si les (λ, μ, ν) redevenaient nuls, faisant la somme des carrés des équations (10), puisque $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$ est égal à L_1^2, on retrouverait pour ρ la valeur (8), que nous désignerons actuellement par ρ_0. Or la même opération donnera encore $\rho = \rho_0$, si

$$(12)\qquad \frac{M}{\lambda} = \frac{N}{\mu} = \frac{P}{\nu},$$

c'est-à-dire si l'élément plan ω a pour équation

$$(13)\qquad \lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

et les équations (10) donnant alors

$$\frac{M'}{x_1} = \frac{N'}{y_1} = \frac{P'}{z'},$$

le flux sera dirigé suivant le rayon vecteur L_1. Donc, pour un milieu cristallisé quelconque, il existe un système de plans parallèles, et un seul, pour lequel l'obliquité du flux et la conductibilité correspondante sont les mêmes que si les (λ, μ, ν) n'existaient pas, ou que l'égalité symétrique eût lieu.

§ XLVIII.

LIGNES REPRÉSENTATIVES.

Le facteur j étant toujours celui par lequel il faut multiplier la ligne L, dont la direction est celle du flux, pour avoir la conductibilité ρ, on aura non-seulement $\rho = jL$, mais aussi $\rho_0 = jL_0$; la ligne L_0 étant le rayon vecteur de l'ellipsoïde (2), de même direction que L_1, et qui représente la conductibilité ρ_0.

En outre, les coefficients (λ, μ, ν) étant de même espèce que ces conductibilités, prenons sur la normale au plan (13) une longueur R égale à

$$\text{(14)} \qquad R = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{j};$$

la direction de cette normale sera donnée par les cosinus

$$\text{(15)} \qquad \frac{\lambda}{jR}, \quad \frac{\mu}{jR}, \quad \frac{\nu}{jR}.$$

[Il importe de remarquer que la ligne fixe et constante R est portée sur la normale au plan (13), dans le sens défini par les signes des cosinus (15), et pas dans l'autre. C'est comme dans la Statique, lorsqu'on représente un couple par une ligne, proportionnelle à son moment, portée sur la normale à son plan, et cela dans un seul sens, qui est défini par celui de la rotation.]

Enfin, pour simplifier les équations (10), on pourra poser

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} P\mu - N\nu = M''jl, \\ M\nu - P\lambda = N''jl, \\ N\lambda - M\mu = P''jl, \end{cases}$$

(M'', N'', P'') étant les cosinus des angles que fait avec les axes une nouvelle ligne l; le produit jl étant de même espèce que les (λ, μ, ν), ou représentant une certaine conductibilité. La direction et la grandeur de la ligne l sont assignables. En effet, si l'on ajoute les trois équations (16), après les avoir respectivement multipliées, une première fois par (λ, μ, ν), une seconde par (M, N, P), les premiers membres donneront zéro dans les deux cas, et l'on aura par les seconds

$$(17)\quad \lambda M'' + \mu N'' + \nu P'' = 0, \quad MM'' + NN'' + PP'' = 0;$$

ce qui montre que la droite l est perpendiculaire au plan qui projette R (14) sur ω, et conséquemment parallèle à cet élément.

De plus, si l'on fait la somme des carrés des mêmes équations (16), $(M^2 + N^2 + P^2)$ étant l'unité, ainsi que $(M''^2 + N''^2 + P''^2)$, le résultat pourra se mettre sous la forme

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\lambda M + \mu N + \nu P)^2 = j^2 l^2;$$

or, la première partie est $j^2 R^2$, la seconde est $j^2 R^2 \cos^2(R, p_1)$, en désignant par (R, p_1) l'angle que la ligne R fait avec p_1; substituant ces valeurs, divisant par j^2, mettant R^2 en facteur commun, introduisant le sinus de l'angle (R, p_1) et extrayant la racine carrée, il vient définitivement

$$(18)\quad l = R \sin(R, p_1);$$

c'est-à-dire que la ligne l est égale en grandeur à la projection de R sur le plan de l'élément ω.

§ XLIX.

LOIS DANS LE CAS GÉNÉRAL.

A l'aide de ces diverses préparations, les équations (10) vont prendre une forme nouvelle et très-simple. Les pre-

miers termes des seconds membres sont évidemment les produits de ρ_0 (8) par les cosinus $\left(\frac{x_1}{L_1}, \frac{y_1}{L_1}, \frac{z_1}{L_1}\right)$; substituant ces produits, ainsi que les valeurs (16), remplaçant ρ par jL, ρ_0 par jL_0, et divisant par j, il vient :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} M'L &= \frac{x_1}{L_1}L_0 + M''l,\\ N'L &= \frac{y_1}{L_1}L_0 + N''l,\\ P'L &= \frac{z_1}{L_1}L_0 + P''l; \end{aligned}\right.$$

or, L_0 ayant la même direction que L_1, ces équations disent que les projections de la ligne L sont les sommes des projections correspondantes des deux lignes L_0 et l; c'est-à-dire que L est le troisième côté d'un triangle, dont L_0 et l sont les deux autres côtés.

En résumé, dans le cas général, la direction et le coefficient du flux pour un élément-plan ω donné se déterminent de la manière suivante : on mène parallèlement à ω un plan tangent à l'ellipsoïde principal, et sur lequel on abaisse la perpendiculaire p_1; le produit de cette perpendiculaire par le rayon vecteur L_1 allant au point de contact, multiplié par q et divisé par jr^2, donne une ligne L_0, que l'on porte de $\mathfrak{M}$ en E_0 sur la ligne L_1; par le point E_0 on

Fig. 6.

mène une droite E_0E, égale à la projection de R ou de $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$

sur le plan ω, et parallèle à ce plan suivant une direction perpendiculaire à la projection, dans le sens indiqué par les signes des premiers membres (16). Cela fait, la ligne $\overline{\mathfrak{M}E}$ donne la direction du flux, et cette ligne, multipliée par j, donne le coefficient ρ correspondant.

Pour l'élément ω perpendiculaire à R, la projection est nulle, ainsi que $\overline{E_0 E}$, et l'on retrouve le système unique du § XLVII. Dans le cas de l'égalité symétrique, R est zéro, EE_0 est nul partout, le flux a la direction de L_1 et $\rho = jL_0$; c'est la solution du § XLVI. Dans le cas du § XXXVIII, l'ellipsoïde principal est une sphère que l'on peut rapporter à R pour axe polaire et à l'équateur (13): la projection de R sur ω est dans le plan méridien mené par le point de contact; $\overline{E_0 E}$ est perpendiculaire à ce plan; sa plus grande valeur est R (14); elle a lieu pour les éléments-plans méridiens sur lesquels le flux, alors dirigé dans le plan de l'équateur, a la plus grande obliquité, et où le coefficient ρ atteint son maximum $\sqrt{\alpha^2 + j^2 R^2}$.

§ L.

SYMÉTRIE DE LA CONDUCTIBILITÉ ρ.

Dans le triangle $\mathfrak{M} E_0 E$, qui résume la solution précédente, la direction du côté L_0 est nettement déterminée; celle du côté l, opposé au sommet $\mathfrak{M}$, dépend des signes des cosinus (M'', N'', P'') ou de ceux des premiers membres (16). S'il existe deux milieux cristallins, tels que les coefficients (α, β, γ) sont les mêmes, et que les (λ, μ, ν) ont les mêmes valeurs absolues, mais de signes contraires : ils ont même ellipsoïde principal, même plan tangent parallèle à ω, même L_0 sur $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1}$, et quoique R ait deux directions opposées, l a aussi la même grandeur. Mais, dans la construc-

tion finale, les deux triangles ne sont pas les mêmes, car le côté l a deux directions opposées, et fait avec L_0 deux angles différents qui sont supplémentaires. La direction et la grandeur du côté L seront donc différentes.

Au contraire si, pour un même milieu, on cherche successivement les directions et les coefficients des deux flux, correspondant aux deux faces d'un même élément-plan, la construction finale conduit à deux triangles opposés l'un à l'autre, mais égaux; car L_0 aura la même grandeur et deux directions opposées, et il en sera de même de l, puisque les premiers membres (16) changent de signe avec (M, N, P); donc aussi L aura la même grandeur et deux directions opposées.

Ainsi, dans un milieu cristallin quelconque, comme dans le cas de l'égalité symétrique, la conductibilité résultante ρ, ou le coefficient des flux obliques, est le même pour deux directions opposées l'une à l'autre, tandis que la conductibilité angulaire $\mathcal{F}(\varphi,\psi)$ (Ire Leçon) peut être très-différente. C'est en ne confondant pas ces deux genres de conductibilités que la théorie analytique de la chaleur peut aider à découvrir les véritables lois de la physique moléculaire. En un mot, quand $\mathcal{F}$ n'est pas égal dans les deux sens, la ligne R existe, et malgré cela le coefficient ρ est le même pour les deux faces de tout élément-plan.

§ LI.

RECHERCHE DES FLUX COORDONNÉS OBLIQUES.

La différence caractéristique entre le cas général et celui de l'égalité symétrique est donc nettement définie par l'existence de la ligne R (14), dont les projections $\left(\frac{\lambda}{j}, \frac{\mu}{j}, \frac{\nu}{j}\right)$, sur les axes de l'ellipsoïde principal, sont proportionnelles

aux coefficients (λ, μ, ν) des variations tangentielles de la température dans les fonctions Ω_u. Lorsque l'équation générale de la chaleur, exprimée en coordonnées obliques, a la forme (18), § XXVI, et que l'ellipsoïde principal se trouve conséquemment rapporté à un système de diamètres conjugués, les variations qui composent les fonctions $\Omega_{u'}$ des nouveaux flux coordonnés, ont d'autres coefficients qui dépendent encore de la ligne R. La loi générale de cette dépendance, qui mérite d'être signalée, peut s'établir à l'aide des formules de transformation du § XXV, que nous transcrivons ici pour plus de clarté.

Dans le système primitif des axes rectangulaires, en substituant aux coefficients (α, β, γ), les valeurs

$$(20) \qquad \alpha = qa^2, \quad \beta = qb^2, \quad \gamma = qc^2,$$

l'ellipsoïde principal est ainsi représenté :

$$(21) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2;$$

l'équation générale qui régit la température V devient

$$(22) \qquad a^2 \frac{d^2V}{dx^2} + b^2 \frac{d^2V}{dy^2} + c^2 \frac{d^2V}{dz^2} = k \frac{dV}{dt};$$

et les fonctions Ω_u des flux coordonnés sont

$$(23) \qquad \begin{cases} \Omega_x = qa^2 \dfrac{dV}{dx} + \nu \dfrac{dV}{dy} - \mu \dfrac{dV}{dz}, \\ \Omega_y = -\nu \dfrac{dV}{dx} + qb^2 \dfrac{dV}{dy} + \lambda \dfrac{dV}{dz}, \\ \Omega_z = \mu \dfrac{dV}{dx} - \lambda \dfrac{dV}{dy} + qc^2 \dfrac{dV}{dz}. \end{cases}$$

Les formules qui donnent les (x, y, z) en coordonnées obliques étant

$$(24) \qquad \begin{cases} x = mx' + m'y' + m''z', \\ y = nx' + n'y' + n''z', \\ z = px' + p'y' + p''z', \end{cases}$$

mettent l'ellipsoïde principal sous la forme

$$(25) \qquad \frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} + \frac{z'^2}{C^2} = r^2,$$

et l'équation de la chaleur sous celle-ci

$$(26) \qquad A^2 \frac{d^2V}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2V}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2V}{dz'^2} = k \frac{dV}{dt},$$

si les cosinus $(m^{(j)}, n^{(j)}, p^{(j)})$, qui donnent

$$(27) \qquad \begin{cases} m'm'' + n'n'' + p'p'' = \cos\theta, \\ m''m + n''n + p''p = \cos\theta', \\ mm' + nn' + pp' = \cos\theta'', \end{cases}$$

pour ceux des angles-plans $(\theta, \theta', \theta'')$ de l'angle trièdre des (A, B, C), et qui satisfont aux relations fondamentales

$$(28) \qquad m^2+n^2+p^2=1, \quad m'^2+n'^2+p'^2=1, \quad m''^2+n''^2+p''^2=1,$$

vérifient en outre, conjointement avec les (A, B, C), les six relations nouvelles

$$(29) \qquad \begin{cases} \left(\frac{Am}{a}\right)^2 + \left(\frac{Bm'}{a}\right)^2 + \left(\frac{Cm''}{a}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{An}{b}\right)^2 + \left(\frac{Bn'}{b}\right)^2 + \left(\frac{Cn''}{b}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{Ap}{c}\right)^2 + \left(\frac{Bp'}{c}\right)^2 + \left(\frac{Cp''}{c}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{An}{b}\right)\left(\frac{Ap}{c}\right) + \left(\frac{Bn'}{b}\right)\left(\frac{Bp'}{c}\right) + \left(\frac{Cn''}{b}\right)\left(\frac{Cp''}{c}\right) = 0, \\ \left(\frac{Ap}{c}\right)\left(\frac{Am}{a}\right) + \left(\frac{Bp'}{c}\right)\left(\frac{Bm'}{a}\right) + \left(\frac{Cp''}{c}\right)\left(\frac{Cm''}{a}\right) = 0, \\ \left(\frac{Am}{a}\right)\left(\frac{An}{b}\right) + \left(\frac{Bm'}{a}\right)\left(\frac{Bn'}{b}\right) + \left(\frac{Cm''}{a}\right)\left(\frac{Cn''}{b}\right) = 0, \end{cases}$$

lesquelles établissent directement, pour les inverses des

équations (24), les formules

(30)
$$\begin{cases} \dfrac{x'}{A} = \dfrac{Am}{a}\dfrac{x}{a} + \dfrac{An}{b}\dfrac{y}{b} + \dfrac{Ap}{c}\dfrac{z}{c}, \\ \dfrac{y'}{B} = \dfrac{Bm'}{a}\dfrac{x}{a} + \dfrac{Bn'}{b}\dfrac{y}{b} + \dfrac{Bp'}{c}\dfrac{z}{c}, \\ \dfrac{z'}{C} = \dfrac{Cm''}{a}\dfrac{x}{a} + \dfrac{Cn''}{b}\dfrac{y}{b} + \dfrac{Cp''}{c}\dfrac{z}{c}. \end{cases}$$

§ LII.

FORMULES COMPLÉMENTAIRES.

Rappelons en outre que le produit des carrés des axes et celui des carrés des diamètres conjugués sont liés par l'identité

(31)
$$a^2 b^2 c^2 = A^2 B^2 C^2 . \varpi,$$

où ϖ représente la somme trigonométrique

(31 *bis*)
$$1 + 2\cos\theta \cos\theta' \cos\theta'' - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' = \varpi,$$

comme cela résulte de l'équation (29), § XXVIII, dont les racines sont (a^2, b^2, c^2). On peut déduire de là qu'un parallélipipède dont les côtés de grandeurs quelconques seront parallèles aux (x', y', z'), aura pour volume le produit de ces côtés multiplié par $\sqrt{\varpi}$. Voici d'ailleurs la démonstration directe de cette proposition. Soient (X, Y, Z) les côtés du prisme oblique, et Θ l'angle dièdre dont l'arête est X; la base étant XY $\sin\theta''$, la hauteur sera Z $\sin\theta' \sin\Theta$, et le volume

$$XYZ \sin\theta' \sin\theta'' \sin\Theta;$$

or la formule principale de la trigonométrie sphérique donnant

$$\sin\theta' \sin\theta'' \cos\Theta = \gamma - \gamma'\gamma'',$$

où (γ, γ', γ'') sont les cosinus des angles (θ, θ', θ''), on en

conclut

$$\sin^2\theta' \sin^2\theta'' \sin^2\Theta = (1-\gamma'^2)(1-\gamma''^2) - (\gamma - \gamma'\gamma'')^2 = \varpi;$$

le volume est donc bien réellement $XYZ\sqrt{\varpi}$.

Enfin, établissons une dernière formule préparatoire. Le carré du sinus de l'angle θ, d'après la valeur (27) de son cosinus et les relations (28), devient successivement

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\ &= (m'^2+n'^2+p'^2)(m''^2+n''^2+p''^2)-(m'm''+n'n''+p'p'')^2 \\ &= (n'p''-p'n'')^2+(p'm''-m'p'')^2+(m'n''-n'm'')^2. \end{aligned}\right.$$

Or si l'on désigne, comme au § XLIII, par les $(M^{(j)}, N^{(j)}, P^{(j)})$ les neuf parenthèses distinctes du groupe (29), qui devient alors celui (s'), § XLII, l'existence de ce groupe implique, comme on le sait, celle de neuf autres relations ayant la forme

$$N'P'' - P'N'' = M,$$

et si l'on restitue, dans trois d'entre elles, aux parenthèses leurs valeurs, on trouve

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} n'p''-p'n'' &= \frac{abc}{ABC}\cdot\frac{A^2 m}{a^2}, \\ p'm''-m'p'' &= \frac{abc}{ABC}\cdot\frac{A^2 n}{b^2}, \\ m'n''-n'm'' &= \frac{abc}{ABC}\cdot\frac{A^2 p}{c^2}; \end{aligned}\right.$$

puis les équations (31) et (32) donnent définitivement la première :

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{m^2}{a^4}+\frac{n^2}{b^4}+\frac{p^2}{c^4} &= \frac{\sin^2\theta}{A^4\varpi}, \\ \frac{m'^2}{a^4}+\frac{n'^2}{b^4}+\frac{p'^2}{c^4} &= \frac{\sin^2\theta'}{B^4\varpi}, \\ \frac{m''^2}{a^4}+\frac{n''^2}{b^4}+\frac{p''^2}{c^4} &= \frac{\sin^2\theta''}{C^4\varpi}; \end{aligned}\right.$$

et les deux autres qui sont ses homologues.

§ LIII.

LOIS DES FLUX COORDONNÉS OBLIQUES.

Tout cela étant posé, la fonction $\Omega_{x'}$, appartenant au flux qui traverse le plan des $y' z'$, doit avoir pour expression

$$\Omega_{x'} = \mathfrak{M}\,\Omega_x + \mathfrak{N}\,\Omega_y + \mathfrak{P}\,\Omega_z,$$

$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ étant les cosinus des angles que la normale au plan $x' = 0$, ou

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{pz}{c^2} = 0$$

[d'après les formules (30)], fait avec les (x, y, z); cosinus qui ont pour valeurs

$$\mathfrak{M} = \frac{im}{a^2}, \quad \mathfrak{N} = \frac{in}{b^2}, \quad \mathfrak{P} = \frac{ip}{c^2},$$

dans lesquelles le coefficient i est

$$i = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{a^4} + \frac{n^2}{b^4} + \frac{p^2}{c^4}}} = \frac{A^2\sqrt{\varpi}}{\sin\theta},$$

d'après la première équation (34). On aura donc la nouvelle forme

$$(35) \qquad \Omega_{x'} \sin\theta = A^2\sqrt{\varpi}\left(\frac{m}{a^2}\Omega_x + \frac{n}{b^2}\Omega_y + \frac{p}{c^2}\Omega_z\right),$$

qu'il s'agit d'exprimer à l'aide des variations de V, suivant les (x', y', z').

Les formules primitives (24) donnent la dérivée partielle

$$(36) \qquad \frac{d.}{dx'} = m\frac{d.}{dx} + n\frac{d.}{dy} + p\frac{d.}{dz},$$

et les formules inverses (30) le groupe complet

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d.}{dx} &= \frac{A^2 m}{a^2}\frac{d.}{dx'} + \frac{B^2 m'}{a^2}\frac{d.}{dy'} + \frac{C^2 m''}{a^2}\frac{d.}{dz'},\\ \frac{d.}{dy} &= \frac{A^2 n}{b^2}\frac{d.}{dx'} + \frac{B^2 n'}{b^2}\frac{d.}{dy'} + \frac{C^2 n''}{b^2}\frac{d.}{dz'},\\ \frac{d.}{dz} &= \frac{A^2 p}{c^2}\frac{d.}{dx'} + \frac{B^2 p'}{c^2}\frac{d.}{dy'} + \frac{C^2 p''}{c^2}\frac{d.}{dz'}. \end{aligned}\right.$$

La substitution, dans l'équation (35), des Ω_u (23), conduit d'abord, d'après l'équation (36), à

$$(38)\qquad \Omega_{x'} \sin\theta = q\,A^2\sqrt{\varpi}\frac{dV}{dx'} + A^2\sqrt{\varpi}.T,$$

en représentant par T la somme

$$\lambda\left(\frac{n}{b^2}\frac{dV}{dz} - \frac{p}{c^2}\frac{dV}{dy}\right) + \mu\left(\frac{p}{c^2}\frac{dV}{dx} - \frac{m}{a^2}\frac{dV}{dz}\right) + \nu\left(\frac{m}{a^2}\frac{dV}{dy} - \frac{n}{b^2}\frac{dV}{dx}\right);$$

cette somme, transformée à l'aide des formules (37), devient

$$\begin{aligned} &B^2\frac{dV}{dy'}\left(\frac{np'-pn'}{b^2c^2}\lambda + \frac{pm'-mp'}{c^2a^2}\mu + \frac{mn'-nm'}{a^2b^2}\nu\right)\\ -&C^2\frac{dV}{dz'}\left(\frac{n''p-p''n}{b^2c^2}\lambda + \frac{p''m-m''p}{c^2a^2}\mu + \frac{m''n-n''m}{a^2b^2}\nu\right); \end{aligned}$$

et, lorsqu'on y substitue aux numérateurs des fractions qui multiplient les (λ, μ, ν) les valeurs données par les six homologues des formules (33), on a définitivement

$$(39)\quad A^2\sqrt{\varpi}.T = (m''\lambda + n''\mu + p''\nu)\frac{dV}{dy'} - (m'\lambda + n'\mu + p'\nu)\frac{dV}{dz'}.$$

De là résulte enfin qu'en posant, dans un but de simplification,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} m\lambda + n\mu + p\nu &= \lambda',\\ m'\lambda + n'\mu + p'\nu &= \mu',\\ m''\lambda + n''\mu + p''\nu &= \nu', \end{aligned}\right.$$

l'expression (38) avec la valeur (39) sera la première du groupe

$$(41)\quad \begin{cases} \Omega_{x'}\sin\theta = q\,A^2\sqrt{\varpi}\,\dfrac{dV}{dx'} + \nu'\,\dfrac{dV}{dy'} - \mu'\,\dfrac{dV}{dz'}, \\ \Omega_{y'}\sin\theta' = -\nu'\,\dfrac{dV}{dx'} + q\,B^2\sqrt{\varpi}\,\dfrac{dV}{dy'} + \lambda'\,\dfrac{dV}{dz'}, \\ \Omega_{z'}\sin\theta'' = \mu'\,\dfrac{dV}{dx'} - \lambda'\,\dfrac{dV}{dy'} + q\,C^2\sqrt{\varpi}\,\dfrac{dV}{dz'}; \end{cases}$$

les deux autres s'obtenant absolument de la même manière.

On reconnaît maintenant à l'inspection des relations (40), que, si les anciens coefficients (λ, μ, ν) étaient égaux aux produits de j par les projections de la ligne R (14) sur les axes de l'ellipsoïde principal, les nouveaux coefficients (λ', μ', ν'), sont égaux aux produits de j par les projections de la ligne R sur les diamètres conjugués du même ellipsoïde. Cette loi, d'une généralité remarquable, et qui ramène toujours la ligne R comme pour constater son existence, paraîtra sans doute assez importante, pour justifier les calculs qui viennent de l'établir.

§ LIV.

VÉRIFICATION.

On vérifie les valeurs (41) en établissant directement l'équation générale (26) en coordonnées obliques. Prenant pour élément de volume le parallélipipède obliquangle aux côtés (dx', dy', dz'), l'aire commune des deux faces $(\omega_{x'}, \omega'_{x'})$ parallèles au plan des $y'\,z'$ étant $dy'\,dz'\sin\theta$, le flux de chaleur qui entre par $\omega_{x'}$, pendant le temps dt, est

$$dy'\,dz'\sin\theta\,.\,dt\,(-\,\Omega_{x'}),$$

et celui qui sort par $\omega'_{x'}$

$$dy'\,dz'\sin\theta\,.\,dt\left(-\Omega_{x'}-\frac{d\Omega_{x'}}{dx'}\,dx'\right)$$

(en négligeant ici l'infiniment petit, d'ordre inférieur, qu'introduirait le transport au centre de gravité de l'élément). L'excès du premier flux sur le second donnera le premier terme du groupe total

$$dx'\,dy'\,dz'\,.\,dt\left(\frac{d\Omega_{x'}}{dx'}\sin\theta+\frac{d\Omega_{y'}}{dy'}\sin\theta'+\frac{d\Omega_{z'}}{dz'}\sin\theta''\right);$$

les deux autres termes provenant de la même manière des flux qui traversent les faces parallèles aux plans des $z'x'$ et des $x'y'$.

Ce gain total échauffant de $\frac{dV}{dt}dt$ degrés, le parallélipipède élémentaire dont le calorique spécifique est Γ, la densité Δ, et le volume $\sqrt{\varpi}\,dx'\,dy'\,dz'$, doit être égal à

$$\Gamma\Delta\,\frac{dV}{dt}\sqrt{\varpi}\,dx'\,dy'\,dz'\,dt;$$

et substituant aux $\Omega_{u'}$ leurs valeurs (41), supprimant tous les facteurs communs, et introduisant le rapport $k=\frac{\Gamma\Delta}{q}$, on arrive effectivement à l'équation (26).

§ LV.

COROLLAIRES.

Plusieurs propriétés, précédemment signalées, se déduisent directement des expressions générales (41). Ainsi, lors

de l'égalité symétrique, la ligne R étant nulle, ainsi que toutes ses projections, les $\Omega_{u'}$ (41) se réduisent à

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_{x'} &= q\,\frac{A^2\sqrt{\varpi}}{\sin\theta}\,\frac{dV}{dx'},\\ \Omega_{y'} &= q\,\frac{B^2\sqrt{\varpi}}{\sin\theta'}\,\frac{dV}{dy'},\\ \Omega_{z'} &= q\,\frac{C^2\sqrt{\varpi}}{\sin\theta''}\,\frac{dV}{dz'}: \end{aligned}\right.$$

et ne contiennent que la variation de la température suivant l'axe correspondant. C'est-à-dire que le flux oblique qui traverse un plan diamétral de l'ellipsoïde principal est dirigé suivant son diamètre conjugué. C'est la loi du § XLVI, avec la valeur du coefficient, ou de la conductibilité ρ, exprimée d'une autre manière.

Dans le cas général, pour que l'un des $\Omega_{u'}$ (41), par exemple $\Omega_{x'}$, ne contienne que la variation de la température suivant l'axe x' correspondant, il faut que les projections de la ligne R sur y' et z' soient nulles, ou que le plan des $y'z'$ soit perpendiculaire à cette ligne; mais si (μ', ν') sont nuls, λ' existe et l'on a

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_{x'} &= q\,\frac{A^2\sqrt{\varpi}}{\sin\theta}\cdot\frac{dV}{dx'},\\ \Omega_{y'}\sin\theta' &= q\,B^2\sqrt{\varpi}\,\frac{dV}{dy'} + \lambda'\,\frac{dV}{dz'},\\ \Omega_{z'}\sin\theta'' &= q\,C^2\sqrt{\varpi}\,\frac{dV}{dz'} - \lambda'\,\frac{dV}{dy'}; \end{aligned}\right.$$

il n'y a donc qu'un seul élément plan pour lequel le flux oblique soit le même que si R n'existait pas.

Lorsque R a la même direction qu'un des axes de l'ellipsoïde principal, les projections sur les deux autres axes sont nulles; un seul des coefficients (λ, μ, ν) existe; et les

trois fonctions Ω_u (23) reproduisent le groupe (43), dans le cas particulier de

$$\theta = \theta' = \theta'' = \frac{\pi}{2},$$

et de (A, B, C) respectivement égaux à (a, b, c).

SIXIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT PAR COMMUNICATION.
PRISME RECTANGLE.

Partie différentielle et partie intégrale en physique mathématique. — Problème général du refroidissement des corps solides homogènes non cristallins. — Refroidissement par communication du prisme rectangle. — Cas d'un état initial constant.

§ LVI.

PARTIE DIFFÉRENTIELLE ET PARTIE INTÉGRALE.

Toute branche de la physique mathématique se subdivise en deux parties distinctes : la partie différentielle et la partie intégrale. La première comprend la mise en équations aux différences partielles, et toutes les conséquences qui se déduisent de l'ordre et des diverses transformations de ces équations. La seconde s'occupe de l'intégration des mêmes équations dans des cas généraux ou particuliers, et conduit finalement à l'évaluation numérique des résultats théoriques. L'étendue ou l'importance relative de ces deux parties change avec les progrès de la science.

Au début, à l'époque des tâtonnements et des essais, la partie différentielle, s'appuyant sur une ou plusieurs lois préconçues, cède rapidement la place à la partie intégrale, afin d'obtenir, par les intégrations les plus simples, des nombres dont la comparaison avec les résultats donnés par l'expérience, ou l'observation, permette de se prononcer sur la valeur de l'idée primitive. Après un nombre

suffisant d'épreuves semblables, les équations aux différences partielles, successivement modifiées, indiquent une forme définitive vers laquelle elles convergent. En même temps, les procédés de leur intégration se sont étendus et généralisés, de manière à indiquer aussi une convergence vers une marche uniforme.

La science peut alors entrer dans une voie nouvelle, et chercher à découvrir la loi naturelle du phénomène étudié, ou son véritable principe. La partie différentielle devient prédominante. Elle étudie toutes les conséquences, toutes les relations qui résultent de la forme définitive des équations générales. Elle transforme ces conséquences et ces relations en autant de lois différentielles, dont l'ensemble, successivement simplifié, doit aboutir à la loi unique ou au principe que l'on cherche. Quand ce principe sera enfin découvert, la partie intégrale dominera à son tour. Elle calculera les phénomènes, rendra compte des perturbations, et la vérification expérimentale ou naturelle de ses résultats et de ses explications donnera au principe trouvé une certitude inattaquable.

J'ai fait voir ailleurs que la théorie mathématique de l'élasticité est actuellement au milieu de sa course. Et tout porte à penser que si elle y reste stationnaire, c'est qu'elle y attend la théorie analytique de la chaleur, avec laquelle elle doit désormais travailler pour découvrir en commun le principe de la mécanique terrestre.

Il importait donc d'accélérer la marche de cette dernière science, en donnant à sa partie différentielle, jusqu'ici presque inaperçue, toute l'étendue et toute l'activité nécessaires. Nos cinq premières leçons prouvent qu'il suffisait d'entreprendre ce travail pour en déduire des conséquences imprévues, qui rappellent : la dynamique, l'élasticité, la lumière, l'électricité, et qui indiquent même assez nettement la véritable cause de la chaleur, quand on rapproche les for-

mules de la leçon précédente, de celles qui régissent les rotations des corps. Mais il serait prématuré de développer ici ces conséquences. Nous quitterons donc la partie différentielle pour ne plus nous occuper que de la partie intégrale, qui conduit pareillement à des rapprochements et à des indications utiles.

§ LVII.

PROBLÈME DU REFROIDISSEMENT.

Le problème général de la théorie analytique de la chaleur que nous étudierons principalement est celui du refroidissement d'un corps solide, dont les températures initiales étaient connues, et qui perd actuellement sa chaleur, soit par communication directe avec une source froide, soit par le rayonnement de sa surface dans une enceinte à température constante ; cette température, fixe comme celle de la source, étant prise pour zéro. Nous supposerons d'abord que la surface totale σ du corps comprend deux parties, l'une σ' rayonnant vers l'enceinte, l'autre σ'' en contact avec la source.

Dans ces circonstances, s'il s'agit d'un corps homogène non cristallisé, l'équation générale est

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = k\frac{dV}{dt}$$

(§ XXI). L'équation à la surface σ se décompose ainsi :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{dV}{dx}\cos\xi + \frac{dV}{dy}\cos\eta + \frac{dV}{dz}\cos\zeta + lV\right)_{\sigma'} = 0, \\ V_{\sigma''} = 0, \end{array} \right.$$

(ξ, η, ζ) étant les angles que la normale *extérieure*, en chaque point de σ', fait avec les axes coordonnés ; l étant

la fraction $\frac{\varepsilon}{q}$, laquelle peut différer d'un point à un autre par le pouvoir émissif ε. L'état initial pour $t = o$ est

$$(3) \qquad V_0 = f(x, y, z) = f.$$

Il s'agit de déterminer une fonction V de (x, y, z, t), vérifiant l'équation (1) et satisfaisant aux conditions (2) et (3). Ce problème d'analyse se résout comme il suit.

On prend la fonction V sous la forme

$$(4) \qquad V = \mathrm{S}\, M U e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}.$$

d'une somme de termes simples, qui vérifient tous et séparément les équations (1) et (2). Chacun de ces termes est le produit de trois facteurs : d'un coefficient indéterminé M, d'une fonction U de (x, y, z), et d'une exponentielle où θ^2 est constant. La vérification de l'équation (1) donnant

$$(5) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} + \theta^2 U = o,$$

et celle des équations (2) exigeant que

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dU}{dx}\cos\xi + \frac{dU}{dy}\cos\eta + \frac{dU}{dz}\cos\zeta + lU\right)_{\sigma'} = o, \\ U_{\sigma''} = o, \end{array} \right.$$

la recherche particulière au corps proposé, et dont la forme est définie, consiste à trouver tous les groupes (U, θ^2), composés chacun d'une fonction U et d'une constante θ^2, qui rendent identiques les relations (5) et (6).

Quand tous ces groupes sont reconnus, il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients M, de telle sorte que l'on

ait identiquement

$$(7) \qquad \mathrm{S}\, \mathrm{MU} = f,$$

afin que l'équation (3) soit vérifiée par la fonction V (4). Or cette détermination s'opère invariablement de la même manière, à l'aide d'un théorème général, dont voici la démonstration.

§ LVIII.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

Les relations (5) et (6) particularisant un groupe (U, θ^2), soient

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dx^2} + \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dy^2} + \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dz^2} + \theta'^2 \mathrm{U}' = 0, \\ & \left(\frac{d\mathrm{U}'}{dx} \cos\xi + \frac{d\mathrm{U}'}{dy} \cos\eta + \frac{d\mathrm{U}'}{dz} \cos\zeta + l\mathrm{U}' \right)_{\sigma'} = 0, \\ & \mathrm{U}'_{\sigma''} = 0, \end{aligned} \right.$$

celles qui particularisent un autre groupe (U', θ'^2). Si l'on multiplie la première (8) par $\mathrm{U}\,dxdydz$, et qu'on l'intègre dans toute l'étendue du corps, on aura identiquement

$$(9) \quad \iiint \left(\frac{d^2 \mathrm{U}'}{dx^2} + \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dy^2} + \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dz^2} + \theta'^2 \mathrm{U}' \right) \mathrm{U}\, dxdydz = 0.$$

Soient x_1 et x_2 les abscisses des deux points M_1 et M_2 où une droite parallèle aux x vient percer la surface σ du corps proposé, lesquelles abscisses seront fonctions des deux autres coordonnées (y, z). Le premier terme de (9) peut se mettre sous la forme

$$\iint dydz \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U} \frac{d^2 \mathrm{U}'}{dx^2} dx,$$

et, intégrant en x, par partie, sous celle-ci :

$$(10)\quad \int\int dydz\left[U\frac{dU'}{dx}\right]_{x_1}^{x_2} - \int\int\int \frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}\,dxdydz.$$

Désignons généralement par le symbole

$$\int_\sigma \mathfrak{F}\,d\sigma$$

toute sommation faite sur la surface σ du corps, décomposée en éléments $d\sigma$, infiniment petits du second ordre, égaux ou inégaux, de même forme ou de formes différentes, uniquement assujettis à ne laisser aucun vide entre eux : $\mathfrak{F}$ étant la valeur de la quantité à sommer qui appartient au centre de gravité de chaque élément $d\sigma$. Dans l'intégrale double de (10), qui est

$$\int\int\left[dydz\left(U\frac{dU'}{dx}\right)_{x_2} - dydz\left(U\frac{dU'}{dx}\right)_{x_1}\right],$$

le rectangle $dydz$ est la projection commune, sur le plan des yz, d'un élément $d\sigma_2$ de la surface en M_2, et d'un élément $d\sigma_1$ en M_1 ; et (ξ_2, ξ_1) étant les angles que les deux normales *extérieures* en M_2 et M_1 font avec l'axe des x, on a identiquement

$$dydz = d\sigma_2\cos\xi_2 = -\,d\sigma_1\cos\xi_1.$$

L'intégrale double précédente devient donc

$$\int\int\left[d\sigma_2\left(U\frac{dU'}{dx}\right)_{x_2}\cos\xi_2 + d\sigma_1\left(U\frac{dU'}{dx}\right)_{x_1}\cos\xi_1\right],$$

ou, plus simplement, en employant la notation introduite,

$$\int_\sigma U\frac{dU'}{dx}\cos\xi\,d\sigma;$$

la quantité $\mathfrak{F}$ étant ici la valeur numérique du produit

$U\frac{dU'}{dx}\cos\xi$, qui appartient au centre de gravité de l'élément $d\sigma$.

Pour simplifier, et par analogie, désignons encore par le nouveau symbole

$$\int_{\varpi} F\,d\varpi$$

toute sommation faite dans le volume ϖ du corps, décomposé en éléments $d\varpi$, infiniment petits du troisième ordre; F étant la valeur de la quantité à sommer qui appartient au centre de gravité de $d\varpi$. La substitution dans (10), de la dernière forme de l'intégrale double donnera la première des trois identités

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
\int_{\varpi} U\frac{d^2U'}{dx^2}d\varpi &= \int_{\sigma} U\frac{dU'}{dx}\cos\xi\,d\sigma - \int_{\varpi}\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}d\varpi,\\
\int_{\varpi} U\frac{d^2U'}{dy^2}d\varpi &= \int_{\sigma} U\frac{dU'}{dy}\cos\eta\,d\sigma - \int_{\varpi}\frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy}d\varpi,\\
\int_{\varpi} U\frac{d^2U'}{dz^2}d\varpi &= \int_{\sigma} U\frac{dU'}{dz}\cos\zeta\,d\sigma - \int_{\varpi}\frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}d\varpi;
\end{aligned}\right.$$

les deux autres résultant, du second terme (9) intégré d'abord par rapport à y, et du troisième terme (9) intégré d'abord par rapport à z.

A l'aide des valeurs (11), l'équation (9) devient

$$\theta'^2\int_{\varpi} UU'\,d\varpi + \int_{\sigma} U\left(\frac{dU'}{dx}\cos\xi + \frac{dU'}{dy}\cos\eta + \frac{dU'}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma$$
$$= \int_{\varpi}\left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right)d\varpi.$$

Or, dans la sommation faite sur la surface σ, la quantité $\mathfrak{F}$ est nulle sur toute la partie σ'', d'après la seconde (6), et se réduit à $-lUU'$ sur toute la partie σ', d'après la se-

conde (8); on aura donc définitivement

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{c} \theta'^2 \int_\varpi UU'\,d\varpi = \\ \int_{\sigma'} lUU'\,d\sigma + \int_\varpi \left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right) d\varpi. \end{array}\right.$$

Si, au contraire, on multiplie l'équation (5) par $U'd\varpi$, et que l'on intègre dans toute l'étendue du corps, la même suite d'opérations conduit à une autre équation, qui ne diffère de l'équation (12) que par le coefficient θ^2 au lieu de θ'^2. Or, dans les deux équations finales, les seconds membres sont les mêmes, les premiers membres doivent donc être égaux; c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$(13)\qquad (\theta'^2 - \theta^2) \int_\varpi UU'\,d\varpi = 0,$$

et, conséquemment, quand θ'^2 et θ^2 sont différents,

$$(14)\qquad \int_\varpi UU'\,d\varpi = 0.$$

Et tel est le théorème général (14) qu'il s'agissait d'établir.

§ LIX.

COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

Maintenant, pour déterminer ou isoler le coefficient M, facteur d'une fonction particulière U, il suffit de multiplier l'équation (7) par $U d\varpi$, et d'intégrer ses deux membres dans toute l'étendue du corps : alors tous les termes de la série, autres que le terme choisi, disparaissent d'après le théorème (14), et l'on a définitivement

$$(15)\qquad M = \frac{\int_\varpi fU\,d\varpi}{\int_\varpi U^2\,d\varpi}.$$

Le plus ordinairement, la température initiale f est constante dans le volume ϖ, et plus élevée que celle de la source ou de l'enceinte; on peut donc la prendre pour unité, et alors

$$M = \frac{\int_\varpi U\, d\varpi}{\int_\varpi U^2 d\varpi}. \tag{16}$$

Cette application du théorème général (14) suffit pour compléter la solution du problème posé. Mais le même théorème conduit à d'autres conséquences, qui peuvent servir à l'étude de la solution trouvée. Dans l'équation (12), le second membre partage nécessairement les propriétés du premier, lequel est nul d'après l'équation (14) quand les deux fonctions (U, U') sont différentes, mais qui subsiste quand $U' = U$, et que conséquemment $\theta'^2 = \theta^2$. D'où résultent les deux corollaires

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\varpi \left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right) d\varpi + \int_{\sigma'} l UU' d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int_\varpi \left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right] d\varpi + \int_{\sigma'} l U^2 d\sigma \\ \displaystyle\qquad = \theta^2 \int_\varpi U^2 d\varpi, \end{cases}$$

qui s'étendent à toutes les variétés du partage de la surface totale σ en σ' et σ'', et à toutes les grandeurs, constantes ou variables, de la conductibilité extérieure l. Si le refroidissement du corps s'opère dans un bain à température zéro, la partie σ' n'existant pas, l'intégrale double $\int_{\sigma'}$ disparaît. Elle disparaît encore si $l = 0$ sur σ'; c'est-à-dire si cette partie de la surface σ est *imperméable à la chaleur*, ou si les flux qui lui correspondent sont nuls, pendant toute la durée du refroidissement.

§ LX.

REFROIDISSEMENT DU PRISME RECTANGLE.

Lorsqu'on veut trouver la loi intégrale du refroidissement d'un corps solide de forme donnée, il résulte de la solution générale, qui vient d'être exposée, que toute la difficulté se concentre dans la découverte des groupes (U, θ^2), ou des termes simples, particuliers au solide. Proposons-nous de rechercher quels sont tous les corps de forme polyédrique, pour lesquels cette difficulté puisse être levée. En ne considérant d'abord que le cas le plus simple de l'équation à la surface, celui où la partie σ' n'existe pas, c'est-à-dire le cas du refroidissement, dit *par communication*, d'un solide totalement immergé dans un bain à température fixe (par exemple, dans la glace fondante). Commençons par le polyèdre le plus anciennement connu, le seul que Fourier et Poisson aient traité.

Le corps solide est un parallélipipède rectangle dont les côtés sont (a, b, c). Prenant l'un des sommets pour origine, et les arêtes qui s'y coupent pour axes coordonnés, l'équation à la surface devient le groupe

$$(18) \qquad V_\sigma = 0, \text{ quand } \begin{cases} x = 0; & x = a; \\ y = 0; & y = b; \\ z = 0; & z = c; \end{cases}$$

et la vérification des équations (5) et (6) est obtenue par la fonction et la constante

$$(19) \qquad \begin{cases} U = \sin i\pi \dfrac{x}{a} \sin i'\pi \dfrac{y}{b} \sin i''\pi \dfrac{z}{c}, \\ \theta^2 = \left(\dfrac{i^2}{a^2} + \dfrac{i'^2}{b^2} + \dfrac{i''^2}{c^2}\right)\pi^2; \end{cases}$$

(i, i', i'') étant des nombres entiers.

Puisqu'on a généralement

$$(20)\qquad \int_0^{\lambda} \sin^2 j\pi\frac{\alpha}{\lambda}\,d\alpha = \frac{\lambda}{2},$$

λ étant une longueur constante, et j un nombre entier quelconque, autre que zéro, le dénominateur de M (15) est simplement $\frac{abc}{8}$ et

$$(21)\qquad M = \frac{8}{abc}\int_0^c\int_0^b\int_0^a f\sin i\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{b}\sin i''\pi\frac{z}{c}\,dx\,dy\,dz.$$

§ LXI.

THÉORÈMES SPÉCIAUX.

Il ne sera pas inutile de vérifier, dans le cas actuel, le théorème général (14). Quand (i, j) sont des nombres entiers différents, on a identiquement

$$(22)\qquad \int_0^{\lambda} \sin i\pi\frac{\alpha}{\lambda}\sin j\pi\frac{\alpha}{\lambda}\,d\alpha = 0;$$

car le premier membre admet les formes successives

$$\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\left[\cos(i-j)\pi\frac{\alpha}{\lambda} - \cos(i+j)\pi\frac{\alpha}{\lambda}\right]d\alpha,$$

$$\frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{\sin(i-j)\pi\frac{\alpha}{\lambda}}{i-j} - \frac{\sin(i+j)\pi\frac{\alpha}{\lambda}}{i+j}\right]_0^{\lambda}$$

et j différant de i, la dernière expression s'évanouit aux deux limites, par $\sin 0 = 0$, et par $\sin(i \pm j)\pi = 0$. Et de là résulte qu'avec deux fonctions (U, U') de la forme (19),

mais différentes, l'intégrale définie triple

$$\int\int\int UU' dxdydz,$$

prise dans toute l'étendue du corps, aura la valeur *zéro*; car elle sera le produit de trois intégrales définies simples, desquelles une au moins s'annulera d'après l'équation (22), puisque les fonctions (U, U') étant différentes, un au moins des entiers (i, i', i'') (19), facteurs respectifs des trois arcs $\left(\pi\frac{x}{a}, \pi\frac{y}{b}, \pi\frac{z}{c}\right)$, diffère de l'une à l'autre.

Il importe de constater que la même conséquence s'étend aux cas où les deux fonctions emploient les trois mêmes entiers (i, i', i''), mais avec des places différentes. Par exemple, si i'' facteur de l'arc en z étant le même, i facteur de l'arc en x dans U est facteur de l'arc en y dans U', et qu'en même temps i' facteur de l'arc en y dans U soit facteur de l'arc en x dans U', les entiers i et i' étant différents, deux des trois intégrales définies simples, facteurs de l'intégrale triple, celle en x et celle en y, s'annuleront à la fois. Et cela, lors même que b serait égal à a, et conséquemment θ'^2 égal à θ^2; d'où résulte un théorème particulier, qui nous était nécessaire, et qui n'est pas compris dans le théorème général (14).

§ LXII.

LOIS GÉNÉRALES POUR LE PRISME RECTANGLE.

En résumé, lors du refroidissement par communication du prisme rectangle, la température variable V de tous ses points est donnée par la formule intégrale

$$(23) \qquad V = \sum MU e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

en composant chaque terme simple avec les expressions correspondantes, (19) de (U, θ^2), (21) de M, et attribuant successivement à chacun des trois entiers (i, i', i'') toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini; d'où résulte une série triple.

Si, de même que U (19), la fonction f est le produit XYZ de trois facteurs variables chacun avec une seule coordonnée, X avec x, Y avec y, Z avec z, le coefficient M (21) devient pareillement le produit MM'M'' de trois facteurs, qui sont

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= \frac{1}{a}\int_0^a X \sin i\pi\frac{x}{a}\,dx,\\ M' &= \frac{1}{b}\int_0^b Y \sin i'\pi\frac{y}{b}\,dy,\\ M'' &= \frac{1}{c}\int_0^c Z \sin i''\pi\frac{z}{c}\,dz, \end{aligned}\right.$$

et, d'après la valeur (19) de θ^2, si l'on pose

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum M \sin i\pi\frac{x}{a}\cdot e^{-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\cdot\frac{t}{k}} = V_x,\\ &\sum M' \sin i'\pi\frac{y}{b}\cdot e^{-\left(\frac{i'\pi}{b}\right)^2\cdot\frac{t}{k}} = V_y,\\ &\sum M'' \sin i''\pi\frac{z}{c}\cdot e^{-\left(\frac{i''\pi}{c}\right)^2\cdot\frac{t}{k}} = V_z, \end{aligned}\right.$$

la fonction V (23) pourra se mettre sous la forme

$$(26)\qquad V = V_x . V_y . V_z .$$

On reconnaît facilement que chacune des séries simples (25) donne la loi intégrale du refroidissement d'un mur ou d'une couche solide d'épaisseur a, ou b, ou c, comprise entre deux plans parallèles et indéfinis, entretenus

sur toute leur étendue à la température zéro; si tous les points d'une même section parallèle aux faces du mur ont à toute époque la même température, c'est-à-dire si l'état initial est une fonction X de x seul, ou Y de y seul, ou Z de z seul.

Autrement : chacune des séries (25) donnera la loi particulière du refroidissement du parallélipipède, si les deux faces perpendiculaires à l'axe des x, ou des y, ou des z, sont seules traversées librement par les flux se rendant à la source froide, tandis que les quatre faces parallèles au même axe restent imperméables à la chaleur; si, en outre, tous les points d'une section parallèle aux faces froides ont primitivement même température. Et, d'après (26), les trois lois particulières donneront, en se combinant par multiplication, la loi complète du refroidissement, quand les flux traversent librement les six faces du prisme.

§ LXIII.

CAS DE L'ÉTAT INITIAL CONSTANT.

Ce résultat est remarquable. Il suppose, il est vrai, que l'état initial soit un produit XYZ. Mais il a lieu quand f est une constante, et c'est le cas qui se présente le plus fréquemment dans les applications. Alors f, ainsi que ses trois facteurs, peuvent être égalés à l'unité. L'intégrale définie

$$\int_0^\lambda \sin i\pi\frac{\alpha}{\lambda}\, d\alpha,$$

étant nulle quand i est un entier pair, et ayant la valeur $\frac{2\lambda}{i\pi}$ quand i est impair $(2j+1)$, chaque coefficient (24) prend la forme

$$\frac{4}{(2j+1)\pi},$$

et chaque série partielle (25) celle-ci

$$(27) \qquad V_u = \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(2j+1)\pi\frac{u}{\lambda}}{2j+1} \cdot e^{-\left(\frac{2j+1 \cdot \pi}{\lambda}\right)^2 \frac{t}{\lambda}};$$

laquelle se réduit à zéro sur les faces ($u = 0$, $u = \lambda$), quel que soit t, et quand t est nul à

$$\frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(2j+1)\pi\frac{u}{\lambda}}{2j+1};$$

série classique, dont la valeur connue est *l'unité*, tant que u est compris entre 0 et λ, et *zéro* pour ces deux limites. Ce qui prouve clairement que la fonction V (26), formée par le produit de trois V_u (27), satisfera à toutes les conditions qui lui sont imposées.

§ LXIV.

INTERPRÉTATION ANALYTIQUE.

Analytiquement, la série (23), composée avec les (U, θ^2) (19), doit être considérée comme exprimant un certain état calorifique variable d'un milieu solide, indéfini dans tous les sens, et où les coordonnées (x, y, z) peuvent atteindre toutes les grandeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Alors, la série s'évanouit, quel que soit le temps t, lorsque x, ou y, ou z, est un multiple, positif ou négatif, de a, ou de b, ou de c. C'est-à-dire qu'à toute époque, la température V est nulle sur les trois suites orthogonales de plans parallèles et équidistants, qui découpent l'espace solide en prismes rectangles égaux.

Si, n étant un nombre entier quelconque, on fait successivement $x = na + \xi$ et $x = na - \xi$, ou $y = nb + \eta$ et $y = nb - \eta$, ou $z = nc + \zeta$ et $z = nc - \zeta$, la série prend

de telle sorte que la fonction intégrale V s'écrira ainsi :

$$(3)\qquad \left\{ V = \sum\!\!\sum\!\!\sum (MU + M'U')e^{-\theta^2\frac{t}{k}} + \sum\!\!\sum NWe^{-\tau^2\frac{t}{k}}; \right.$$

la série triple réunissant les termes où i et i' sont différents, et la série double ceux où $i' = i$. Pour distinguer les termes généraux des deux séries multiples, les lettres (M, U, θ^2) du premier, sont remplacées dans le second par (N, W, τ^2), d'où résulte

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} W &= \sin i\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{c}, \\ \tau^2 &= \left(2\frac{i^2}{a^2} + \frac{i''^2}{c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Pour que V (3) reproduise l'état initial f, il faut que l'on ait identiquement

$$(5)\qquad \sum\!\!\sum\!\!\sum (MU + M'U') + \sum\!\!\sum NW = f.$$

La méthode d'élimination du § LIX, permet d'isoler chaque coefficient N, qui multiplie le terme correspondant à une valeur choisie de τ^2 ; ce qui conduit à

$$(6)\qquad N = \frac{a^2c}{8}\int_{\varpi} fW\,d\varpi;$$

en appliquant la formule générale (20), (§ LX), pour évaluer le dénominateur. Quant aux deux coefficients M et M' qui multiplient deux fonctions U et U' correspondant à un même θ^2, il ne semble pas, au premier abord, que la méthode d'élimination citée puisse isoler chacun d'eux.

En effet, si l'on multiplie successivement l'équation (5) par $U\,d\varpi$ et $U'd\varpi$, U et U' ayant les valeurs (2) qui correspondent à la valeur choisie de θ^2, et qu'on intègre à chaque fois dans toute l'étendue du corps, les termes appartenant à

toutes les autres valeurs de θ^2 disparaissent, d'après le théorème général (14), § LVIII, et l'on aura, par les deux opérations successives

$$(7) \qquad \begin{cases} M\int_\varpi U^2 d\varpi + M'\int_\varpi UU'\,d\varpi = \int_\varpi fU d\varpi, \\ M\int_\varpi UU' d\varpi + M'\int_\varpi U'^2 d\varpi = \int_\varpi fU' d\varpi; \end{cases}$$

ce qui paraît faire dépendre la détermination de M et M', de la résolution de deux équations du premier degré.

Or, d'après les dernières remarques du § LXI, l'intégrale triple

$$\int_\varpi UU' d\varpi,$$

où U et U' sont les fonctions conjuguées (2), a la valeur zéro: car, bien que U et U' emploient les mêmes entiers, puisque i et i', qui ne sont pas égaux, occupent des places différentes, les deux intégrales définies simples, en x et en y, facteurs de l'intégrale triple précédente, s'annuleront d'après l'identité (22) du paragraphe cité.

Les deux équations (7) isolent donc réellement les deux coefficients M et M', dont les valeurs sont

$$(8) \qquad \begin{cases} M = \dfrac{8}{a^2 c}\displaystyle\int_\varpi fU d\varpi, \\ M' = \dfrac{8}{a^2 c}\displaystyle\int_\varpi fU' d\varpi, \end{cases}$$

car les deux dénominateurs ont la valeur commune $\frac{a^2 c}{8}$, d'après la formule (20), § LX. Avec les valeurs (6) et (8) des coefficients (N, M, M') la série totale (3) exprimera la loi du refroidissement par communication du prisme droit à base carrée, quelque compliquée que soit la fonction f.

§ LXVI.

CARACTÈRES DE LA SOLUTION.

Il semblera que le paragraphe précédent pouvait être supprimé: car, l'isolement réel des deux coefficients conjugués M et M', n'étant qu'une conséquence du théorème particulier signalé à la fin du § LXI, on pouvait en conclure qu'il suffit de faire $b = a$, dans la valeur de M (21), § LX, et dans la série (23), § LXII, appartenant au prisme rectangle, pour en déduire les valeurs (6), (8), et la série (3), qui appartiennent au prisme droit à base carrée. Mais, l'égalité $b = a$, qui introduit une symétrie géométrique particulière dans le prisme rectangle, et qui réunit, deux à deux avec le même facteur exponentiel, les termes de sa série, donne à cette série une propriété qu'elle ne possédait pas, celle de pouvoir exprimer le refroidissement par communication d'un nouveau polyèdre, qui n'est pas un parallélipipède. Et c'est pour cela que les détails qui précèdent étaient nécessaires.

L'égalité $b = a$ établit, en outre, une différence de notation caractéristique entre la série (3) pour le prisme à base carrée, et la série pour le prisme rectangle. Dans cette dernière, l'entier i appartient exclusivement aux arcs en x, et i' aux arcs en y. Dans la série (3) les deux entiers, i et i', ont absolument des rôles identiques, car ils affectent successivement, et de la même manière, des arcs en y et en x; de telle sorte que, substituer l'un à l'autre, c'est opérer une simple permutation d'indices ou d'accents, laquelle ne peut avoir aucune influence, ni sur l'étendue, ni sur la valeur définitive de la série.

De là résulte une conséquence importante. Si, pour traiter certain cas particulier du refroidissement du prisme à base carrée, il faut que, dans le terme général de la série triple (3), l'un des deux entiers i et i' soit pair et l'autre

impair, on peut adopter i pour le nombre pair, i' pour l'impair, et la série ainsi modifiée sera aussi complète qu'il est nécessaire. Car, prendre au contraire, i' pair et i impair, revient à permuter l'accent, ou à écrire la même série en y remplaçant l'une par l'autre deux lettres, sans changer les significations inhérentes aux places occupées. Composer la série totale de deux séries partielles, l'une avec i pair et i' impair, l'autre avec i impair et i' pair, ce serait doubler une même série, absolument comme si l'on écrivait deux fois les termes de la série (23), § LXII, appartenant au prisme rectangle : car, en cherchant ce qu'est devenu tel terme de cette dernière, par suite de l'égalité de b à a, on le retrouverait dans chacune des deux séries partielles.

§ LXVII.

SYMÉTRIE CALORIFIQUE DIRECTE.

On peut donner maintenant un exemple remarquable d'une loi générale, dont voici l'énoncé. Si le polyèdre dont on veut exprimer le refroidissement présente une symétrie géométrique qui ne soit pas altérée par l'équation à la surface, lorsque l'état initial apporte une certaine symétrie calorifique, en rapport direct ou inverse avec celle du polyèdre, cette symétrie est conservée pendant toute la durée du refroidissement : les termes de la fonction V s'associent de manière à la faire ressortir, et si certains termes ne peuvent la partager, ces termes disparaissent.

S'il s'agit du prisme à base carrée, quand on change x en y et y en x, on passe d'un point m à un second point m', et ces deux points (m, m') sont symétriques par rapport au plan diagonal $y = x$, qui partage le polyèdre en deux prismes triangulaires égaux, à base rectangle isocèle, et symétriquement placés. Lors du refroidissement par com-

munication que nous considérons, toute la surface du polyèdre est entretenue à la température zéro, c'est-à-dire de la même manière de part et d'autre du plan diagonal.

Supposons que les températures primitives soient symétriquement les mêmes dans les deux prismes triangulaires, c'est-à-dire que la fonction f apporte une telle symétrie directe, que, si l'on remplace x par y et y par x, sa valeur ne soit pas changée ; d'où résultera qu'à l'origine du refroidissement, le plan diagonal ne sera traversé par aucun flux, puisque les températures seront les mêmes de part et d'autre.

Alors, dans le terme général de la série triple (3), les deux coefficients M et M′ deviennent égaux. En effet, le changement de x en y et de y en x transformant U en U′ et réciproquement, tandis que f reste le même, la somme des deux éléments qui comprennent respectivement les points symétriques (m, m') sera la même et égale à $f(U+U')\,d\varpi$, pour les deux intégrales (8), qui, étant ainsi composées d'un même nombre de couples égaux, seront conséquemment égales. Donc $M' = M$. Quant à l'intégrale (6), W restant le même, comme f, quand on passe de m à m', cette intégrale totale sera la somme de deux intégrales partielles identiques. La fonction V (3) sera donc

$$(9)\qquad V = \sum\sum\sum M(U+U')e^{-\theta^2 \frac{t}{k}} + \sum NW e^{-\tau^2 \frac{t}{k}},$$

et reproduira exactement, à toute époque, la symétrie directe apportée par la fonction f, puisqu'en y remplaçant x par y et y par x tous les facteurs $(U+U')$ et W ne changeront pas.

On peut constater, en outre, que le plan diagonal restera imperméable à la chaleur pendant toute la durée du refroidissement, comme il l'était à l'origine. En effet, pour tout élément ω parallèle au plan $y - x = 0$, la fonction Ω fac-

teur du flux qui le traverse, sera

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{dV}{dy} - \frac{dV}{dx}\right),$$

d'après la formule (30), § XVIII. Or le facteur en (x, y) de $(U + U')$ est

$$\sin i\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{a} + \sin i'\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a},$$

et ses premières dérivées en y et en x deviennent évidemment égales quand $y = x$, c'est-à-dire lorsque ω est sur le plan diagonal; et il en est de même des dérivées du facteur en (x, y) de W, qui est la moitié du précédent écrit avec $i' = i$; tous les termes de V (9) jouissent donc de cette propriété. D'où résulte enfin $\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dx}$, ou $\Omega = 0$, quand $y = x$, et cela quel que soit t.

§ LXVIII.

SYMÉTRIE CALORIFIQUE INVERSE.

Supposons maintenant que les températures initiales soient symétriquement égales et de signes contraires, dans les deux prismes triangulaires, c'est-à-dire que la fonction f apporte une telle symétrie inverse, que, si l'on y remplace x par y et y par x, elle change de signe en conservant la même valeur absolue; d'où résultera qu'à l'origine du refroidissement, le plan diagonal aura la température *zéro* dans toute son étendue, cette température étant la seule qui puisse à la fois être la même et avoir des signes contraires, quand les deux points symétriques (m, m') se confondent.

Alors les termes aux coefficients N disparaissent dans

V (3) : car, dans l'élément de l'intégrale (6), le facteur W a la même valeur avec le même signe aux deux points (m, m'), tandis que le facteur f a deux valeurs égales et de signes contraires; l'intégrale totale sera donc nulle, comme étant composée d'éléments positifs et négatifs, en même nombre, et qui se détruisent. Ainsi la série double disparaît de (3).

De plus, dans le terme général de la série triple, qui reste seule, les coefficients M et M' deviennent égaux et de signes contraires. En effet, l'intégrale totale de la première (8) peut être répartie en deux intégrales partielles, composées d'un même nombre de termes, l'une pour le prisme triangulaire dont m fait partie, l'autre pour celui qui comprend m'; $\mathrm{f}\,\mathrm{U}\,d\varpi$ étant l'élément correspondant au point m, si l'on y remplace x par y et y par x, on aura $-\mathrm{f}\,\mathrm{U}'d\varpi$ pour l'élément correspondant au point m'; et il suffira d'intégrer la somme $\mathrm{f}\,(\mathrm{U}-\mathrm{U}')\,d\varpi$ de ces deux éléments, chez le premier prisme triangulaire. Pareillement, dans l'intégrale totale de la seconde (8), l'élément correspondant au point m étant $\mathrm{f}\,\mathrm{U}'d\varpi$, celui qui correspond au point m' sera $-\mathrm{f}\,\mathrm{U}\,d\varpi$; et il suffira d'intégrer la somme $\mathrm{f}(\mathrm{U}'-\mathrm{U})\,d\varpi$ de ces deux éléments, chez le premier prisme triangulaire. Or les deux intégrales ainsi obtenues seront évidemment égales et de signes contraires. Donc $\mathrm{M}'=-\mathrm{M}$.

Ainsi la fonction V (3) se réduit dans le cas actuel à

$$(10)\qquad \mathrm{V}=\sum\!\!\sum\!\!\sum \mathrm{M}\,(\mathrm{U}-\mathrm{U}')\,e^{-\theta^2\frac{t}{k}}.$$

Ici, quand on remplace x par y et y par x, la différence $(\mathrm{U}-\mathrm{U}')$ change de signe en conservant la même valeur absolue; et quand $y=x$, cette différence s'annule, puisqu'alors $\mathrm{U}'=\mathrm{U}$; ces propriétés communes à tous les termes s'étendent à la série elle-même. La fontion V (10) reproduit donc exactement, et à toute époque, la symétrie

inverse, apportée par l'état initial f. En un mot, cette symétrie inverse, traduite analytiquement, a fait disparaître de la série (3) les termes en W qui ne pouvaient l'admettre, et modifié ceux en (U, U′) de manière à s'y établir.

§ LXIX.

PLAN DIAGONAL A ZÉRO.

Si de la symétrie calorifique inverse, introduite par l'état initial, on conclut que le plan diagonal conserve la température zéro, réciproquement, quand la fonction V (3) exprime que le plan diagonal a la température zéro pendant toute la durée du refroidissement, on peut en conclure que la symétrie inverse a lieu à toute époque, et que conséquemment elle existait à l'origine. En effet, pour que V (3) soit zéro, quel que soit t, sur le plan diagonal, il faut que les facteurs $(MU+M'U')$, NW, de toutes les exponentielles, deviennent nuls quand $y=x$; W ne peut l'être, donc $N=0$, et, U′ devenant égal à U, il faut aussi que $M+M'=0$. Ce qui exige que la fonction V ait la forme (10), de laquelle on déduit que la symétrie calorifique inverse existera, puisque V (10) change de signe, en conservant la même valeur absolue, quand on remplace x par y et y par x.

Pareillement, si de la symétrie calorifique directe, introduite par l'état initial, on conclut que le plan diagonal n'est traversé par aucun flux, réciproquement, quand la fonction V (3) exprime que ce plan diagonal reste imperméable à la chaleur pendant toute la durée du refroidissement, on peut en conclure que la symétrie calorifique directe a lieu à toute époque, et que conséquemment elle existait à l'origine. En effet, pour que la fonction V (3) exprime que le flux de chaleur est nul, quel que soit t, pour

tout élément ω du plan $y - x = 0$, il faut que les dérivées partielles en x et en y, de chacun de ses termes, deviennent égales quand $y = x$. C'est ce qui a déjà évidemment lieu pour les termes de la série double. Mais le facteur en (x, y) du terme général de la série triple étant

$$(11) \qquad M \sin i\pi \frac{x}{a} \sin i'\pi \frac{y}{a} + M' \sin i'\pi \frac{x}{a} \sin i\pi \frac{y}{a},$$

ses dérivées en x et en y, qui sont

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \dfrac{i\pi}{a} \cos i\pi \dfrac{x}{a} \sin i'\pi \dfrac{y}{a} + M' \dfrac{i'\pi}{a} \cos i'\pi \dfrac{x}{a} \sin i\pi \dfrac{y}{a}, \\ M \dfrac{i'\pi}{a} \sin i\pi \dfrac{x}{a} \cos i'\pi \dfrac{y}{a} + M' \dfrac{i\pi}{a} \sin i'\pi \dfrac{x}{a} \cos i\pi \dfrac{y}{a}, \end{array} \right.$$

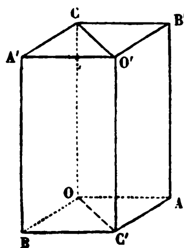
ne peuvent devenir égales, quand $y = x$, que si $M' = M$. Ce qui exige que la fonction V ait la forme (9), de laquelle on déduit que la symétrie calorifique directe existera, puisque V (9) reste le même, quand on remplace x par y et y par x.

§ LXX.

PRISME TRIANGULAIRE $\frac{1}{2}$.

La loi du refroidissement du prisme droit à base carrée n'est exprimable particulièrement par la série (10) que si

Fig. 7.



les deux moitiés, ou les deux prismes triangulaires, ont primitivement des températures égales et de signes contraires; les températures primitives d'une de ces moitiés étant d'ailleurs quelconques. De là résulte que la même série exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement d'un prisme triangulaire droit à base rectangulaire isocèle (OC'ACO'B'), lorsque ses cinq faces

$$(13) \qquad y=0, \quad y=x, \quad x=a, \quad z=0, \quad z=c,$$

sont entretenues à la température zéro; en bornant au volume limité par ces faces, les intégrales qui composent les coefficients.

Et, avec la même restriction, la série (9) exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement du même prisme triangulaire, lorsque ses deux bases et ses deux faces latérales orthogonales étant entretenues à la température zéro, sa face hypoténuse est imperméable à la chaleur. Ce nouveau polyèdre, que nous appellerons *prisme triangulaire* $\frac{1}{2}$, a été introduit en physique mathématique par M. Ostrogradski.

§ LXXI.

LOI DE SON REFROIDISSEMENT.

Pour appliquer directement au prisme triangulaire à base rectangle isocèle, la solution générale du § LVII, il faut substituer aux équations à la surface le groupe

$$(14) \qquad V_\sigma = 0, \text{ quand } \begin{cases} y=0; \quad y=x; \\ x=a; \\ z=0; \quad z=c; \end{cases}$$

qui exprime qu'à toute époque la température doit être

zéro sur les cinq faces du prisme. Chaque terme simple de la série

$$(15)\qquad V = \sum MU_1 e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

devant vérifier l'équation générale (1), § LVII, et les conditions (14), il faut prendre

$$(16)\quad \begin{cases} U_1 = \left(\sin i\pi \frac{x}{a} \sin i'\pi \frac{y}{a} - \sin i'\pi \frac{x}{a} \sin i\pi \frac{y}{a}\right) \sin i''\pi \frac{z}{c}, \\ \theta^2 = \left(\frac{i^2 + i'^2}{a^2} + \frac{i''^2}{c^2}\right)\pi^2. \end{cases}$$

Avec l'indice donné à U_1, la première (16) est plus simplement

$$(16\ bis)\qquad U_1 = U - U',$$

U et U' étant les valeurs (2).

La reproduction de l'état initial exige que l'on ait identiquement

$$\sum MU_1 = f.$$

La méthode d'élimination du § LIX, fondée sur le théorème général (14), § LVIII, isole chaque coefficient M, et donne pour sa valeur

$$(17)\qquad M = \frac{\int_\varpi f U_1\, d\varpi}{\int_\varpi U_1^2\, d\varpi}.$$

Ici les deux intégrales triples devant s'étendre exclusivement au volume du prisme triangulaire, ont les limites

$$\int_\varpi d\varpi \ldots = \int_0^c dz \int_0^a dx \int_0^x dy \ldots.$$

Toutefois, celle du dénominateur peut être obtenue, en étendant l'intégration à tout le prisme droit à base carrée, et prenant la moitié du résultat, puisque le carré U_1^2 retrouve les mêmes valeurs positives dans le second prisme triangulaire. Or, d'après l'équation (16 *bis*),

$$(18) \qquad U_1^2 = U^2 + U'^2 - 2UU';$$

multipliant par $dx\,dy\,dz$, intégrant dans toute l'étendue du prisme à base carrée, les deux premiers termes du second membre (18) donnent chacun $\frac{a^2 c}{8}$, et le troisième *zéro*, § LXV. Le dénominateur de (17) sera donc encore $\frac{a^2 c}{8}$. D'où résulte

$$(19) \qquad M = \frac{8}{a^2 c}\int_0^c dz \int_0^a dx \int_0^x dy . fU.$$

La loi du refroidissement par communication du prisme triangulaire droit, à base rectangle isocèle, sera donc exprimée par la série (15); les coefficients M ayant les valeurs numériques déduites de (19), quand la connaissance de l'état initial permettra d'effectuer la triple intégration indiquée.

§ LXXII.

CAS DE L'ÉTAT INITIAL CONSTANT.

Particulièrement, lorsque l'état initial est constant, ou que $f = 1$, la formule (19) donne

$$(20) \qquad M = \frac{16}{(2j''+1)\pi a^2}\,\mathfrak{M},$$

où $\mathfrak{M}$ représente l'intégrale double

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \left(\sin i\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{a} - \sin i'\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\right);$$

car, après la substitution de U_1 (16), l'intégrale simple en z, qui est zéro quand i'' est pair, a pour valeur $\frac{2c}{i''\pi}$ quand i'' est impair $(2j''+1)$. Il s'agit d'évaluer $\mathfrak{M}$. Effectuant d'abord l'intégration en y, on a

$$\mathfrak{M} = \int_0^a dx \left[\begin{array}{l} \frac{a}{i'\pi}\left(1 - \cos i'\pi\frac{x}{a}\right)\sin i\pi\frac{x}{a} \\ -\frac{a}{i\pi}\left(1 - \cos i\pi\frac{x}{a}\right)\sin i'\pi\frac{x}{a} \end{array} \right],$$

premier résultat que l'on peut décomposer ainsi :

$$(21)\quad \mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{ii'\pi^2}\int_0^a dx\left(\frac{i\pi}{a}\sin i\pi\frac{x}{a} - \frac{i'\pi}{a}\sin i'\pi\frac{x}{a}\right) \\ +\frac{a}{2ii'\pi}\int_0^a dx\left(\begin{array}{l} i'.2\sin i'\pi\frac{x}{a}\cos i\pi\frac{x}{a} \\ -i.2\sin i\pi\frac{x}{a}\cos i'\pi\frac{x}{a}\end{array}\right). \end{array}\right.$$

Maintenant, soit posé, pour simplifier,

$$(22)\qquad \cos i\pi = \gamma, \qquad \cos i'\pi = \gamma'.$$

La valeur de la première intégrale (21) est évidemment $(\gamma' - \gamma)$; celle de la seconde, mise sous la forme

$$\int_0^a dx\left[(i'-i)\sin(i'+i)\pi\frac{x}{a} + (i'+i)\sin(i'-i)\pi\frac{x}{a}\right)$$

[en observant que $\cos(i'\pm i)\pi = \gamma'\gamma$], est le produit de

$$\left(\frac{i'-i}{i'+i} + \frac{i'+i}{i'-i}\right)$$

par $(1-\gamma'\gamma)\frac{\pi}{a}$. Substituant dans l'équation (21), il vient

$$\mathfrak{M} = \frac{a^2}{ii'\pi^2}\left[\gamma' - \gamma + \frac{i'^2+i^2}{i'^2-i^2}(1-\gamma'\gamma)\right],$$

dernière expression que l'on peut mettre sous la forme

$$(23)\qquad \mathfrak{M} = \frac{a^2[i'^2(1+\gamma')(1-\gamma) + i^2(1+\gamma)(1-\gamma')]}{ii'(i'^2 - i^2)\pi^2}.$$

Or cette valeur de $\mathfrak{M}$ sera nulle si i et i' sont tous deux pairs, par $\gamma = \gamma' = 1$; elle sera aussi nulle si i et i' sont tous deux impairs, par $\gamma = \gamma' = -1$. Elle ne subsistera que si l'un de ces deux nombres est pair et l'autre impair : si $i = 2j$ et $i' = 2j' + 1$, elle est

$$(24)\qquad \mathfrak{M} = \frac{8a^2 j}{(2j'+1)[(2j'+1)^2 - (2j)^2]\pi^2};$$

et, si $i = 2j + 1$ et $i' = 2j'$, elle devient

$$(24\ bis)\qquad \mathfrak{M}' = \frac{8a^2 j'}{(2j+1)[(2j')^2 - (2j+1)^2]\pi^2}.$$

Or, on peut adopter exclusivement le premier groupe de valeurs des (i, i'), d'après le § LXVI, et composer M (20) avec $\mathfrak{M}$ (24); ce qui donnera

$$(25)\qquad \mathrm{M} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{2j}{(2j''+1)(2j'+1)[(2j'+1)^2 - (2j)^2]}.$$

En résumé, dans le cas actuel, la fonction V sera donnée par la triple série

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{2j\mathfrak{V}}{(2j'+1)[(2j'+1)^2 - (2j)^2]} \times \\ \frac{\sin(2j''+1)\pi\frac{z}{c}}{2j''+1} e^{-\left[\mathfrak{G}^2 + \left(\frac{2j''+1.\pi}{c}\right)^2\right]\frac{t}{k}}, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{G}^2$ sont, pour simplifier,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \sin 2j\pi\frac{x}{a}\sin(2j'+1)\pi\frac{y}{a} - \sin(2j'+1)\pi\frac{x}{a}\sin 2j\pi\frac{y}{a}, \\ \mathfrak{G}^2 &= [(2j)^2 + (2j'+1)^2]\frac{\pi^2}{a^2}. \end{aligned}\right.$$

Cette série triple peut être considérée comme étant le produit de la série simple

$$(28)\qquad V_z = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\sin(2j''+1)\pi\frac{z}{c}}{2j''+1}\, e^{-\left(\frac{2j''+1.\pi}{c}\right)^2\frac{t}{k}}$$

par la série double

$$(29)\ V_{(x,y)} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{2j\mho}{(2j'+1)[(2j'+1)^2-(2j)^2]}\, e^{-\mho^2\frac{t}{k}}.$$

§ LXXIII.

THÉORÈMES, ET VÉRIFICATION.

La fonction V_z (28) donne la loi du refroidissement d'un mur indéfini, perpendiculaire aux z, d'épaisseur c, ayant primitivement une température constante prise pour unité, et dont les deux faces sont entretenues à la température zéro. La fonction $V_{(x,y)}$ (29) donne la loi du refroidissement d'un prisme indéfini, parallèle aux z, et dont la section droite, B, est un triangle rectangle isocèle de côtés $(a, a, a\sqrt{2})$ lorsque sa température primitive étant 1, ses trois faces sont entretenues à la température zéro. Et la fonction V, qui donne la loi du refroidissement dans le prisme actuel, de base B, de hauteur c, est le produit

$$(30)\qquad V = V_z \,.\, V_{(x,y)}$$

des deux fonctions appartenant aux deux solides indéfinis qui comprennent ce polyèdre.

L'état initial $f=1$, devant être reproduit, quand on annule t, V(30) doit se réduire à l'unité, et puisque le facteur V_z devient 1, § LXIII, il faut qu'il en soit de même du facteur $V_{(x,y)}$. De là résulte ce théorème d'analyse, que la

double série trigonométrique en (x, y)

$$(31)\qquad \sum \frac{2j\varphi}{(2j'+1)[(2j'+1)^2-(2j)^2]}$$

où φ a la valeur (27), est invariablement $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ à l'intérieur de la base B (ou du triangle aux côtés, $y = 0$, $y = x$, $x = a$), tandis qu'elle est essentiellement *zéro*, sur le périmètre de cette base.

On peut vérifier ici la conséquence signalée au § LXVI. Si l'on adopte exclusivement le groupe de valeurs ($i = 2j+1$, $i' = 2j'$), et que l'on compose M(20) avec $\mathfrak{M}'$ (24 *bis*), on arrive à la série

$$(32)\quad \begin{cases} V = \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^3 \displaystyle\sum \frac{2j'\varphi'}{(2j+1)[(2j')^2-(2j+1)^2]} \times \\ \qquad \dfrac{\sin(2j''+1)\pi\dfrac{z}{c}}{2j''+1} e^{-\left[\varpi'^2+\left(\frac{(2j''+1)\pi}{c}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \end{cases}$$

dans laquelle φ' et ϖ'^2 sont

$$\varphi' = \sin(2j+1)\pi\frac{x}{a}\sin 2j'\pi\frac{y}{a} - \sin 2j'\pi\frac{x}{a}\sin(2j+1)\pi\frac{y}{a},$$

$$\varpi'^2 = [(2j+1)^2+(2j')^2]\frac{\pi^2}{a^2}.$$

Or, en changeant à la fois les signes au numérateur et au dénominateur de la fraction

$$\frac{\varphi}{(2j')^2-(2j+1)^2},$$

on voit clairement que la nouvelle série (32) n'est autre que la première (26) écrite avec j' au lieu de j, et réciproquement. Ces deux séries sont donc identiques.

Généralement, la fonction V(15), formée avec les

U_1 (16), exprime l'état calorifique d'un milieu solide, indéfini dans tous les sens. La température est nulle, à toute époque, non-seulement sur les trois suites de plans orthogonaux qui découpent cet espace en prismes carrés égaux, mais en outre sur les deux familles de plans diagonaux représentés par les équations

$$y = 2na - x, \quad y = 2na + x,$$

où le paramètre n est un nombre entier. La symétrie inverse existe pour tous ces plans à zéro; et l'état initial d'un seul des prismes triangulaires composants, assigne celui de tous les autres.

HUITIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES $\frac{1}{6}$, ET $\frac{1}{24}$.

Deux plans diagonaux à zéro, ou sans flux. — Prisme triangulaire $\frac{1}{4}$. — Refroidissement du cube. — Trois plans diagonaux à zéro. — Tétraèdre $\frac{1}{6}$; son refroidissement. — Six plans diagonaux à zéro. — Tétraèdre $\frac{1}{24}$; son refroidissement.

---

§ LXXIV.

DEUX PLANS DIAGONAUX A ZÉRO.

Tout n'est pas dit sur le prisme droit à base carrée : sa symétrie géométrique, et les diverses formes de la série qui exprime son refroidissement, conduisent à d'autres conséquences qu'il importe de signaler. Rapprochons ici, pour plus de clarté, les deux groupes

$$(1)\quad \begin{cases} U = \sin i\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{c}, \\ U' = \sin i'\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{c}, \\ \theta^2 = \left(\frac{i^2+i'^2}{a^2}+\frac{i''^2}{c^2}\right)\pi^2; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} W = \sin i\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{c}, \\ \tau^2 = \left(2\frac{i^2}{a^2}+\frac{i''^2}{c^2}\right)\pi^2; \end{cases}$$

des fonctions, et des constantes correspondantes, qui servent à composer les deux séries

$$(3)\qquad V = \sum M(U - U')e^{-\theta^2 \frac{t}{k}};$$

$$(4)\qquad V = \sum M(U + U')e^{-6^2 \frac{t}{k}} + \sum NWe^{-\tau^2 \frac{t}{k}};$$

lesquelles expriment le refroidissement par communication du prisme à base carrée, la première (3) lorsque le plan diagonal, $y = x$, conserve la température zéro, la seconde (4) lorsque ce plan reste imperméable à la chaleur.

On peut limiter le nombre des termes de la série (3), de telle sorte que V soit nul, quel que soit t, non-seulement sur le plan diagonal $y = x$, mais aussi sur son conjugué $x + y = a$. Le facteur en (x, y) de $(U - U')$ qui est

$$(5)\qquad \sin i\pi \frac{x}{a} \sin i'\pi \frac{y}{a} - \sin i'\pi \frac{x}{a} \sin i\pi \frac{y}{a}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{a}(ix - i'y) - \cos\frac{\pi}{a}(ix + i'y) \\ - \cos\frac{\pi}{a}(i'x - iy) + \cos\frac{\pi}{a}(i'x + iy) \end{array}\right\}$$

et, remplaçant la différence des cosinus de chaque colonne par le double produit des sinus de la demi-somme et de la demi-différence des arcs, sous celle-ci :

$$\begin{array}{l} \sin\frac{i+i'}{2}\pi\frac{x-y}{a}\cdot\sin\frac{i-i'}{2}\pi\frac{x+y}{a} \\ - \sin\frac{i+i'}{2}\pi\frac{x+y}{a}\cdot\sin\frac{i-i'}{2}\pi\frac{x-y}{a}, \end{array}$$

qui montre que ce facteur s'annulera pour $x + y = a$, si

$\frac{i-i'}{2}$ et $\frac{i+i'}{2}$ sont des nombres entiers; c'est-à-dire si i et i' sont, ou tous deux pairs, ou tous deux impairs.

Il suffira donc de supprimer les termes de la série (3) dans lesquels i et i' ont des parités différentes, pour que le second plan diagonal ait la température zéro, comme le premier, pendant toute la durée du refroidissement du prisme à base carrée. D'où l'on peut conclure que la symétrie calorifique inverse existera de part et d'autre du nouveau plan : car n et n' étant deux points symétriquement placés par rapport au plan $x+y=a$, si (x, y, z) sont les coordonnées de n, on passe de n à n', en remplaçant x par $a-y$, et y par $a-x$, dans le facteur (5), qui devient alors

$$\cos i\pi \cos i'\pi \left(\sin i\pi \frac{y}{a} \sin i'\pi \frac{x}{a} - \sin i'\pi \frac{y}{a} \sin i\pi \frac{x}{a}\right)$$

et, $\cos i\pi \cos i'\pi$ étant $+1$, puisque i et i' ont actuellement même parité, ce facteur a changé de signe en conservant la même valeur absolue.

§ LXXV.

DEUX PLANS DIAGONAUX SANS FLUX.

On peut limiter le nombre des termes de la série (4), de telle sorte que non-seulement le plan diagonal, $y=x$, soit imperméable, quel que soit t, mais aussi que son conjugué, $x+y=a$, le soit pareillement. Pour tout élément ω, parallèle au dernier plan, la fonction Ω, facteur du flux qui le traverse, est

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\right);$$

il faut donc que la somme des dérivées en x et en y, de

V (4), s'annule pour $x + y = a$, et cela quel que soit t; ce qui exige que cette condition soit vérifiée séparément par le facteur en (x, y) de chaque exponentielle. Dans la série double ce facteur étant $\sin i\pi \frac{x}{a} \sin i\pi \frac{y}{a}$, la somme de ses deux dérivées, qui se réduit à $\frac{i\pi}{a} \sin i\pi \frac{x+y}{a}$, satisfait à la condition posée. Dans la série triple, le facteur en (x, y) se compose des deux termes de (5) réunis avec le signe $(+)$; à l'aide de deux transformations successives, semblables à celles de (5), la somme de ses dérivées peut se mettre sous la forme

$$\frac{(i+i')\pi}{a} \sin \frac{i+i'}{2} \pi \frac{x+y}{a} \cdot \cos \frac{i-i'}{2} \pi \frac{x-y}{a}$$
$$-\frac{(i-i')\pi}{a} \sin \frac{i-i'}{2} \pi \frac{x+y}{a} \cdot \cos \frac{i+i'}{2} \pi \frac{x-y}{a}$$

qui montre que cette somme s'annulera pour $x+y=a$, si $\frac{i+i'}{2}$ et $\frac{i-i'}{2}$ sont des nombres entiers, c'est-à-dire si i et i' sont, ou tous deux pairs, ou tous deux impairs.

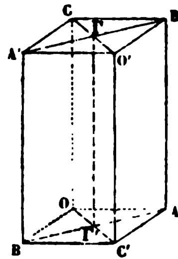
Il suffira donc de supprimer les termes de la série triple (4), dans lesquels i et i' ont des parités différentes, pour que le second plan diagonal reste imperméable comme le premier, pendant toute la durée du refroidissement du prisme à base carrée. D'où l'on peut conclure que la symétrie calorifique existera de part et d'autre du nouveau plan: car, pour passer du point n, à son symétrique n', il suffit de remplacer x par $a - y$, et y par $a - x$; alors le facteur en (x, y) de W reprend la même valeur, multipliée par $\cos^2 i\pi$ ou $+1$; et le facteur en (x, y) de $(U + U')$ reprend aussi la même valeur, multipliée par $\cos i\pi \cos i'\pi$ ou $+1$, puisque i et i' ont actuellement la même parité.

§ LXXVI.

PRISME TRIANGULAIRE $\frac{1}{4}$.

La série (3) limitée aux termes dans lesquels les entiers (i, i') ont même parité, n'exprime particulièrement le refroidissement du prisme à base carrée, que si les quatre prismes triangulaires, découpés par les deux plans diago-

Fig. 8.



naux, ont des températures primitives symétriquement égales et de signes contraires par rapport à chacun de ces plans; de telle sorte que l'état initial, d'ailleurs quelconque, de l'un de ces quatre prismes, assigne nécessairement celui des trois autres. De là résulte, que la même série ainsi limitée, exprimera généralement le refroidissement du premier prisme triangulaire ($O\Gamma'AB'C\Gamma$), lorsque ses cinq faces

$$y = 0, \quad x = y, \quad x = a - y, \quad z = 0, \quad z = c$$

sont entretenues à la température zéro; en bornant au vo-

lume que comprennent ces faces, les intégrales qui déterminent les coefficients.

Ce polyèdre, que nous appellerons prisme triangulaire $\frac{1}{4}$, a encore pour base un triangle rectangle isocèle; il est donc de même forme que le prisme triangulaire $\frac{1}{2}$, et la série actuelle qui exprime le refroidissement du même corps ne différera de celle du § LXXI, que par la position des axes coordonnés, et par $\frac{a}{\sqrt{2}}$ substitué au côté a. Mais la série particulière (4), pareillement limitée aux termes dans lesquels (i, i') ont même parité, pourra servir à exprimer généralement, ou pour tout initial, le refroidissement du même corps dans un cas nouveau : celui où, les deux bases et la face hypoténuse étant entretenues à zéro, les deux faces latérales orthogonales sont imperméables à la chaleur.

§ LXXVII.

REFROIDISSEMENT DU CUBE.

Lorsque, dans le parallélipipède rectangle, les trois côtés sont égaux, le polyèdre devient un cube, et la loi de son refroidissement par communication est toujours exprimée par la série (23), § LXII. Mais il arrive alors que la même exponentielle peut appartenir à six termes : car, puisque $c = b = a$, la valeur générale de θ^2 devient

$$(6) \qquad \theta^2 = (i^2 + i'^2 + i''^2)\frac{\pi^2}{a^2};$$

et, si les (i, i', i'') sont différents, cette valeur est la même

pour les six fonctions :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
U_1 &= \sin i\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{a},\\
U_2 &= \sin i'\pi\frac{x}{a}\sin i''\pi\frac{y}{a}\sin i\pi\frac{z}{a},\\
U_3 &= \sin i''\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\sin i'\pi\frac{z}{a},\\
U'_1 &= \sin i''\pi\frac{x}{a}\sin i'\pi\frac{y}{a}\sin i\pi\frac{z}{a},\\
U'_2 &= \sin i'\pi\frac{x}{a}\sin i\pi\frac{y}{a}\sin i''\pi\frac{z}{a},\\
U'_3 &= \sin i\pi\frac{x}{a}\sin i''\pi\frac{y}{a}\sin i'\pi\frac{z}{a}:
\end{aligned}\right.$$

de telle sorte que dans la série V mise sous la forme

$$(8)\qquad V = \mathrm{S}\, U e^{-\theta^2\frac{t}{k}},$$

le facteur U sera le polynôme

$$(9)\qquad U = \left\{\begin{aligned}
&\quad M_1U_1 + M'_1U'_1,\\
&+ M_2U_2 + M'_2U'_2,\\
&+ M_3U_3 + M'_3U'_3,
\end{aligned}\right.$$

comprenant, six termes quand (i, i', i'') sont tous différents, trois termes seulement si deux de ces nombres sont égaux, un seul terme s'ils ont tous trois la même valeur.

La reproduction de l'état initial exigera l'identité

$$(10)\qquad \mathrm{S}\, U = f.$$

L'isolement du coefficient $\mathfrak{M}$, de tout terme simple $\mathfrak{M}\,\mho$, faisant partie d'un polynôme U (9), s'obtiendra toujours en multipliant l'identité (10) par $\mho\, d\varpi$, et intégrant dans le volume ϖ du cube : car, par cette opération, tous les termes

du premier membre autres que le terme choisi, disparaîtront, ceux appartenant à un autre θ^2 d'après le théorème général (14), § LVIII, ceux groupés sous le même θ^2 d'après le théorème particulier du § LXI; et l'on aura

$$(11)\qquad \mathfrak{M} = \frac{\int_\varpi \mathrm{f}\,\varphi\, d\varpi}{\int_\varpi \varphi^2\, d\varpi}.$$

Le signe symbolique des intégrations définies étant

$$\int_\varpi d\varpi \ldots = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \ldots,$$

une triple application de la formule (20), § LX, donnera invariablement $\left(\frac{a}{2}\right)^3$ pour le dénominateur; d'où

$$(12)\qquad \mathfrak{M} = \left(\frac{2}{a}\right)^3 \int_0^a \int_0^a \int_0^a \mathrm{f}\,\varphi\, dx\, dy\, dz.$$

Avec cette valeur générale de ses coefficients, la série (8) exprimera le refroidissement par communication du cube de côté a, quelque compliquée que soit la fonction f.

Dans cette série (8) appartenant au cube, les trois entiers (i, i', i'') ont absolument des rôles identiques, car ils affectent successivement, et de la même manière, des arcs en x, en y et en z. On déduit, de cette identité, la même conséquence qu'au § LXVI. Si, pour traiter un cas particulier du refroidissement du cube, il faut que, dans le polynôme général U (9), les trois entiers (i, i', i'') aient des parités différentes, que par exemple un seul soit pair et les deux autres impairs, on peut adopter exclusivement i pour le nombre pair, i', i'', pour les impairs, et la série (8), ainsi modifiée, sera aussi complète qu'il est nécessaire.

§ LXXVIII.

TROIS PLANS DIAGONAUX A ZÉRO.

On peut établir, entre les coefficients du polynôme U (9), de telles relations que la fonction V (8) soit nulle pendant toute la durée du refroidissement, non-seulement sur les faces du cube, mais aussi sur un des plans diagonaux

$$(13)\qquad x=y,\quad z=x,\quad y=z,$$

et même sur ces trois plans à la fois. En effet, quand $x=y$, le groupe (7) donnant

$$(14)\qquad U'_1=U_2,\quad U'_2=U_1,\quad U'_3=U_3,$$

le polynôme U (9) s'annulera, si

$$(15)\qquad M'_1=-M_2,\quad M'_2=-M_1,\quad M'_3=-M_3;$$

d'où résulte, qu'en établissant les relations (15) dans tous les facteurs U de V (8), on exprime que la température reste à zéro sur le plan diagonal $x=y$, lequel partage le cube en deux prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, ayant des températures symétriquement égales et de signes contraires. Ces propriétés appartiendront au plan diagonal $z=x$, si au lieu des (15) on prend les relations

$$(16)\qquad M'_1=-M_1,\quad M'_2=-M_3,\quad M'_3=-M_2,$$

et au plan diagonal $y=z$, si l'on établit celles-ci :

$$(17)\qquad M'_1=-M_3,\quad M'_2=-M_2,\quad M'_3=-M_1.$$

Enfin, si l'on prend

$$M_1=M_2=M_3=M,\quad M'_1=M'_2=M'_3=-M,$$

les relations des trois groupes (15), (16), (17), étant satisfaites à la fois, la température sera zéro sur les trois plans diagonaux (13), et les températures du cube seront symétriquement égales et de signes contraires par rapport à chacun de ces trois plans. Posant

$$(18) \qquad U = \left\{ \begin{array}{l} U_1 - U'_1 \\ + U_2 - U'_2 \\ + U_3 - U'_3 \end{array} \right.$$

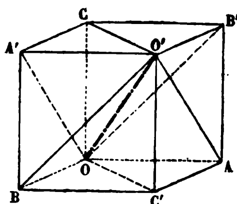
la série V se mettra sous la forme

$$(19) \qquad V = \sum MU e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

et ne contiendra que des termes où (i, i', i'') sont différents, puisque U (18) est nul quand deux de ces nombres sont égaux.

Les trois plans diagonaux (13) partagent le cube en six tétraèdres équivalents, égaux ou symétriques, ayant pour arête commune la diagonale $\overline{OO'}$, du cube, menée par l'origine O. Les quatre faces de ces tétraèdres sont des triangles

Fig. 9.



rectangles, dont deux font partie de la surface du cube, sont isocèles, égaux entre eux, et à la base B d'un prisme triangulaire $\frac{1}{2}$; les deux autres faces situées sur des plans diagonaux, et pareillement égales entre elles, ont pour hy-

poténuse commune la diagonale $\overline{OO'}$, et pour côtés (a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$). On se figure assez nettement ce genre de tétraèdre, par le procédé suivant : Sur un même plan, aux deux extrémités d'une droite $\overline{LL'}$ égale à a, on élève, en sens opposés, des perpendiculaires, $\overline{LO}$, $\overline{L'O'}$, égales aussi à a; puis, autour de $\overline{LL'}$ comme charnière, on fait tourner le plan d'un des triangles rectangles OLL', O'L'L, jusqu'à ce qu'il fasse, avec celui de l'autre triangle resté fixe, un angle dièdre droit; la pyramide OLL'O' sera le tétraèdre dont il s'agit; et, en changeant le sens de la rotation, on aura son symétrique.

§ LXXIX.

TÉTRAÈDRE $\frac{1}{6}$; SON REFROIDISSEMENT.

La série (19) n'exprimera particulièrement la loi du refroidissement du cube, que si la symétrie calorifique inverse existe par rapport à chacun des trois plans diagonaux (13); les températures primitives, d'ailleurs quelconques, d'un seul des six tétraèdres que découpent ces plans, assigneront donc celles des cinq autres. De là résulte que la même série exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement du premier tétraèdre (OAC'O'), lorsque ses quatre faces

$$(20) \qquad z=0, \quad z=y, \quad y=x, \quad x=a,$$

sont entretenues à la température zéro.

Ce troisième polyèdre, que nous appellerons le tétraèdre $\frac{1}{6}$, peut-être traité directement, en appliquant la solution générale du § LVII. La série (19), dans laquelle, le facteur

U (18) est composé avec les fonctions (7), et θ^2 a la valeur (6), vérifie l'équation générale (1), § LVII; tous ses termes vérifiant séparément la même équation. Chaque facteur U satisfait aux conditions de la surface, puisqu'il est nul sur les quatre faces (20). Le coefficient M a la valeur générale

$$\text{(21)} \qquad M = \frac{\int_{\varpi} \mathrm{f} U \, d\varpi}{\int_{\varpi} U^2 d\varpi},$$

où le signe symbolique des intégrations est maintenant

$$\text{(22)} \qquad \int_{\varpi} d\varpi \ldots = \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y dz \ldots .$$

Toutefois, le dénominateur de M (21) peut être obtenu en étendant l'intégration au volume entier du cube, et divisant le résultat par 6 : car, le carré U^2 retrouve la même valeur positive dans les cinq autres tétraèdres. Or, en formant le carré de U (18), le second membre contiendra six carrés $(U_1^2, U_1'^2, \ldots)$, et des doubles produits $(2U_1U_2, -2U_1U_1', \ldots)$; multipliant par $d\varpi$, et intégrant dans le volume du cube, chacun des six carrés donnera $\frac{a^3}{8}$, et les doubles produits donneront zéro, § LXI; donc le dénominateur de M (21) sera encore $\left(\frac{a}{2}\right)^3$; d'où

$$\text{(23)} \qquad M = \left(\frac{2}{a}\right)^3 \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y dz . \mathrm{f} U.$$

Lorsque la connaissance de l'état initial f, permettra d'effectuer les intégrations indiquées, la formule (23) donnera les valeurs numériques de tous les coefficients de la

série (19). Et l'on connaîtra les températures de tous les points du tétraèdre proposé, pendant toute la durée de son refroidissement.

§ LXXX.

CAS DE L'ÉTAT INITIAL CONSTANT.

Particulièrement, si f est constant, et pris égal à l'unité, il faut évaluer l'intégrale définie triple

$$(24)\qquad \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y dz.\mathrm{U},$$

où U est le polynôme (18) composé avec les fonctions (7). En suivant une marche analogue à celle du § LXXII, on évalue trois intégrales partielles, dont la somme donne pour (24) la valeur

$$(25)\qquad \frac{a^3}{ii'i''\pi^3}\cdot\left\{\begin{array}{l} \frac{i''^2+i'^2}{i''^2-i'^2}(1-\gamma\ )(1-\gamma'\gamma'') \\ +\frac{i^2+i''^2}{i^2-i''^2}(1-\gamma'\ )(1-\gamma''\gamma) \\ +\frac{i'^2+i^2}{i'^2-i^2}(1-\gamma'')(1-\gamma\gamma') \end{array}\right\},$$

où $(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'')$ représentent respectivement

$$(\cos i\pi,\quad \cos i'\pi,\quad \cos i''\pi).$$

Or, cette valeur (25) sera nulle, si les entiers $(i,\ i',\ i'')$, lesquels sont essentiellement différents (§ LXXVIII), ont tous même parité, par $\gamma'\gamma''=\gamma''\gamma=\gamma\gamma'=1$; elle sera encore nulle, si deux de ces nombres sont pairs et un seul impair, par $\gamma'=\gamma''=\gamma'\gamma''=1$, ou par $\gamma''=\gamma=\gamma''\gamma=1$, ou par $\gamma=\gamma'=\gamma\gamma'=1$. Elle ne subsistera que si un seul des trois entiers est pair, les deux autres étant impairs.

D'après le § LXXVII, on peut adopter exclusivement le groupe (i pair $= 2j$, i' et i'' impairs) ; et la valeur de M (23) sera

$$(26) \qquad M = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{2j\,(i''^2 - i'^2)}{i''\,i'\,(i''^2 - 4j^2)\,(i'^2 - 4j^2)};$$

ce qui donnera définitivement

$$(27) \qquad V = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{2j\,(i''^2 - i'^2)}{(i'^2 - 4j^2)\,(i''^2 - 4j^2)} \frac{U}{i'\,i''} e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}$$

pour exprimer la loi du refroidissement du tétraèdre $\frac{1}{6}$, totalement immergé dans un bain entretenu à zéro, lorsque sa température primitive est constante et prise pour unité.

Cet état initial devant être reproduit, quand on annule t, V (27) doit se réduire à l'unité. De là résulte ce théorème d'analyse, que la triple série trigonométrique

$$(28) \qquad \sum \frac{2j\,(i''^2 - i'^2)}{(i''^2 - 4j^2)\,(i'^2 - 4j^2)} \frac{U}{i'\,i''},$$

(U étant le polynôme (18) composé avec les fonctions (7), où les entiers i', i'', sont impairs, et i pair égal à $2j$), est invariablement $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$, dans l'intérieur du tétraèdre limité par les faces (20), tandis qu'elle est essentiellement zéro sur ces faces mêmes.

§ LXXXI.

SIX PLANS DIAGONAUX A ZÉRO.

On peut limiter le nombre des termes de la série V (19), appartenant au cube, de telle sorte que V soit nul, quel que soit t, non-seulement sur les six faces, et sur les trois plans

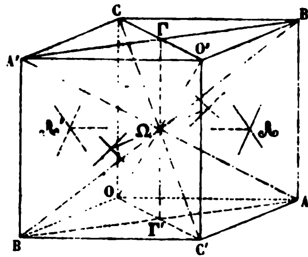
diagonaux (13), mais aussi sur les trois autres plans diagonaux

$$(29)\qquad x+y=a,\quad z+x=a,\quad y+z=a.$$

Les mêmes transformations qu'au § LXXIV, montrent que le polynôme U (18) sera nul sur ces trois nouveaux plans, si les trois entiers (i, i', i'') ont même parité, c'est-à-dire s'ils sont, ou tous trois pairs, ou tous trois impairs. Il suffira donc de supprimer les termes de la série (19) où les entiers (i, i', i'') ont des parités différentes, pour que les plans diagonaux (29) aient la température zéro, comme ceux (13), pendant toute la durée du refroidissement du cube. D'où l'on peut conclure, comme au § LXXIV, que la symétrie calorifique inverse existera pareillement de part et d'autre de chacun de ces nouveaux plans (29).

Les six plans diagonaux (13) et (29) partagent le cube en vingt-quatre tétraèdres égaux, ayant pour sommet commun le centre de ce polyèdre. Chacun de ces tétraèdres a

Fig. 10.



pour base le quart d'une des faces du cube, ou l'un des triangles rectangles isocèles, de côtés $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, a\right)$, formés par les deux diagonales de cette face; sa hauteur $\frac{a}{2}$ part du sommet même de l'angle droit; son symétrique lui est égal.

§ LXXXII.

TÉTRAÈDRE $\frac{1}{24}$, SON REFROIDISSEMENT.

La série (19), limitée aux termes dans lesquels les entiers (i, i', i'') ont même parité, n'exprimera particulièrement la loi du refroidissement du cube, que si les températures primitives sont symétriquement égales et de signes contraires, par rapport à chacun des six plans diagonaux (13) et (29); l'état initial, d'ailleurs quelconque, d'un seul des vingt-quatre tétraèdres découpés par ces plans, assignera donc celui des vingt-trois autres. De là résulte que la même série limitée exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement du premier tétraèdre (OΩΓ'B), lorsque ses faces

$$(30) \qquad z=0, \quad z=x, \quad y=x, \quad y=a-x,$$

seront entretenues à la température zéro.

Ce quatrième polyèdre, que nous appellerons le tétraèdre $\frac{1}{24}$, peut être traité directement, en lui appliquant la marche générale du § LVII. Chaque terme simple de la série (19), et conséquemment cette série elle-même, vérifient l'équation générale (1) (§ LVII). Chaque facteur U (18), composé avec des fonctions (7) où les entiers (i, i', i'') ont même parité, satisfait aux conditions de la surface, puisqu'il est nul sur les quatre faces (30). Le coefficient M a la valeur générale (21), où le signe symbolique des intégrations est actuellement

$$(31) \qquad \int_{\varpi} d\varpi \ldots = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_x^{a-x} dy \int_0^x dz \ldots.$$

Toutefois, le dénominateur de M (21) s'obtient plus

simplement en étendant l'intégration au volume entier du cube, et divisant le résultat par 24 : car le carré U^2 retrouve la même valeur positive dans les vingt-trois autres tétraèdres. Or, comme on l'a vu au § LXXIX, l'intégration, faite dans le cube, du carré de U (18), développé et multiplié par $d\varpi$, donne six fois la fraction $\frac{a^3}{8}$; le dénominateur actuel ne sera donc plus cette fraction même, mais son quart; d'où

$$(32) \qquad M = \frac{32}{a^3} \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_x^{a-x} dy \int_0^x dz.fU.$$

Et, avec cette valeur donnée à ses coefficients, la série V (19), limitée aux termes où (i, i', i'') ont même parité, donnera la loi du refroidissement par communication du tétraèdre $\frac{1}{24}$ ayant les faces (30), quand la connaissance de l'état initial f permettra d'effectuer les intégrations indiquées.

Il importe de remarquer que cette série limitée comprend deux séries partielles, l'une où les (i, i', i'') sont tous pairs, l'autre où ces nombres sont tous impairs. Si la première existait seule, V s'annulerait évidemment, quel que soit t, pour $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}, z = \frac{a}{2}\right)$, ou sur les plans menés par le centre du cube parallèlement à ses faces; et alors le plan $y = \frac{a}{2}$ partagerait le tétraèdre $\frac{1}{24}$ que nous considérons en deux tétraèdres symétriques $\left(\text{respectivement égaux à deux tétraèdres } \frac{1}{6} \text{ symétriques, du cube de côté } \frac{a}{2}\right)$, et dont les températures seraient égales et de signes contraires, par rapport au plan $y = \frac{a}{2}$. D'où l'on conclut que, si l'état ini-

tial du tétraèdre $\frac{1}{24}$ apporte une symétrie calorifique directe par rapport au plan $y = \frac{a}{2}$, la première série partielle disparaîtra nécessairement [par l'annulation de l'intégrale (32)], et il ne restera que la seconde.

§ LXXXIII.

CAS DE L'ÉTAT INITIAL CONSTANT.

C'est ce qui arrive particulièrement quand f est constant et pris pour unité. Il suffit alors d'évaluer l'intégrale

$$(33) \qquad \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_x^{a-x} dy \int_0^x dz . \mathrm{U},$$

quand les (i, i', i'') sont tous impairs; on y parvient en la décomposant en trois intégrales partielles, et l'on trouve sans difficulté, pour la valeur totale,

$$(34) \qquad \frac{2a^3}{ii'i''\pi^3}\left(\frac{\sigma' i' - \sigma'' i''}{\sigma' i' + \sigma'' i''} + \frac{\sigma'' i'' - \sigma i}{\sigma'' i'' + \sigma i} + \frac{\sigma i - \sigma' i'}{\sigma i + \sigma' i'}\right),$$

dans laquelle $(\sigma, \sigma', \sigma'')$ représentent

$$\left(\sin\frac{i\pi}{2},\ \sin\frac{i'\pi}{2},\ \sin\frac{i''\pi}{2}\right),$$

ou bien

$$(35) \qquad \frac{2a^3}{ii'i''\pi^3}\,\frac{(\sigma i - \sigma' i')(\sigma i - \sigma'' i'')(\sigma' i' - \sigma'' i'')}{(\sigma i + \sigma' i')(\sigma i + \sigma'' i'')(\sigma' i' + \sigma'' i'')};$$

en se fondant sur ce théorème d'algèbre, facile à vérifier, que (A, B, C) étant quelconques, on a identiquement

$$\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}+\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}+\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} + \frac{(\mathrm{B}-\mathrm{C})(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{(\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{C}+\mathrm{A})(\mathrm{A}+\mathrm{B})} = 0.$$

Substituant la valeur (35) de l'intégrale (33) dans M (32), et M dans V (19), on a

$$(36)\quad V=\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{(\sigma i-\sigma' i')(\sigma i-\sigma'' i'')(\sigma' i'-\sigma'' i'')}{(\sigma i+\sigma' i')(\sigma i+\sigma'' i'')(\sigma' i'+\sigma'' i'')}\frac{U}{ii'i''}e^{-\theta^2\frac{t}{k}}$$

pour exprimer la loi du refroidissement du tétraèdre $\frac{1}{24}$, primitivement à la température 1, et totalement immergé dans un bain entretenu à la température zéro.

L'état initial $f=1$ devant être reproduit, quand on annule t, V (36) doit se réduire à l'unité. De là résulte ce nouveau théorème d'analyse, que la triple série trigonométrique

$$(37)\quad \sum\left(\frac{\sigma' i'-\sigma'' i''}{\sigma' i'+\sigma'' i''}+\frac{\sigma'' i''-\sigma i}{\sigma'' i''+\sigma i}+\frac{\sigma i-\sigma' i'}{\sigma i+\sigma' i'}\right)\frac{U}{ii'i''}$$

a pour valeur invariable $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$ à l'intérieur du tétraèdre aux faces (30), tandis qu'elle est essentiellement *zéro* sur ces faces mêmes [U étant le polynôme (18), composé avec des fonctions (7), où les entiers (i, i', i'') sont tous trois impairs; $(\sigma, \sigma', \sigma'')$ représentant, pour simplifier, les $\left(\sin\frac{i\pi}{2}, \sin\frac{i'\pi}{2}, \sin\frac{i''\pi}{2}\right)$].

Dans la série (36), les termes où deux des entiers impairs (i, i', i'') seraient égaux disparaîtront toujours, par l'annulation du facteur U, car le coefficient général ne peut pas être infini. En effet, tous les entiers impairs étant de deux espèces, ou des deux formes linéaires différentes $4j+1$, $4j+3$; si les entiers (i, i', i'') sont de la même espèce, les $(\sigma, \sigma', \sigma'')$ seront tous égaux ou à $+1$, ou à -1,

et le coefficient devenant

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{(i-i')(i-i'')(i'-i'')}{(i+i')(i+i'')(i'+i'')} \cdot \frac{1}{ii'i''},$$

pourra être nul, mais jamais infini; et si les impairs (i, i', i'') sont d'espèces différentes, c'est que l'un d'eux, i'' par exemple, sera seul de l'une d'elles; on aura donc $(\sigma = \sigma' = -\sigma'')$, et le coefficient, devenant

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{(i-i')(i+i'')(i'+i'')}{(i+i')(i-i'')(i'-i'')} \cdot \frac{1}{ii'i''},$$

pourra être nul par $i = i'$, mais ne pourra jamais être infini, puisque ni i, ni i' ne peut devenir égal à i'', qui est d'une autre espèce.



NEUVIÈME LEÇON.

PRISME TRIANGULAIRE RÉGULIER.

Symétrie calorifique inverse introduite par tout plan à zéro. — Série pour le refroidissement par communication du prisme triangulaire régulier. — Nouveau genre de coordonnées. — Détermination des coefficients et de leur dénominateur.

§ LXXXIV.

LOI GÉNÉRALE LORS D'UN PLAN A ZÉRO.

Les séries qui donnent la loi intégrale du refroidissement par communication, des divers polyèdres que nous avons traités jusqu'ici, sont trigonométriques et périodiques. Considérées analytiquement comme s'appliquant à l'espace indéfini dans tous les sens, elles expriment que la température est zéro, quel que soit le temps, sur plusieurs suites de plans, parallèles et équidistants, décomposant l'espace en polyèdres équivalents et symétriquement placés. Cette décomposition a une telle analogie avec la constitution des milieux cristallisés, qu'il importe de chercher si elle ne s'étend pas à d'autres polyèdres que ceux qui dérivent du prisme rectangle, ou de ses variétés.

Dans les solutions trouvées, chaque plan à zéro, partage l'espace en deux parties, où les températures sont symétriquement égales et de signes contraires par rapport à ce plan ; symétrie calorifique inverse qui a lieu à toute époque, et conséquemment lors de l'état initial. Or, on peut démontrer que cette loi est reproduite, quand on exprime,

à l'aide d'une série trigonométrique, que la température reste fixée à zéro sur un certain plan P, pendant toute la durée d'un refroidissement.

En effet, dans toute série, dite trigonométrique, et mise sous la forme

$$(1) \qquad V = \sum U e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}$$

le facteur U est toujours réductible en une somme linéaire de sinus et de cosinus d'arcs polynômes

$$(2) \qquad (\lambda x + \mu y + \nu z + \rho)$$

différant par les signes, et même les grandeurs, des coefficients (λ, μ, ν), mais de telle sorte que la somme

$$(3) \qquad \theta^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

de leurs carrés reste la même, afin que l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} + \theta^2 U = 0$$

soit vérifiée. La série (1) devant exprimer que la température est zéro, quel que soit t, sur le plan P, il faut que tout facteur U s'évanouisse lorsqu'on établira, entre les coordonnées, la relation qui constitue l'équation de ce plan. Si l'on passe du système des axes (x, y, z) à un autre (x', y', z'), orthogonal comme le premier, et dans lequel le plan P soit pris pour celui des $y'z'$, d'après les propriétés connues des formules de cette transformation, on aura généralement

$$(5) \qquad \frac{d^2.}{dx'^2} + \frac{d^2.}{dy'^2} + \frac{d^2.}{dz'^2} = \frac{d^2.}{dx^2} + \frac{d^2.}{dy^2} + \frac{d^2.}{dz^2},$$

et les arcs (2) prendront une nouvelle forme

$$(6) \qquad (\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z' + \rho')$$

telle que $(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2)$ sera encore égal au même θ^2. Ainsi, la série (1) exprimera le même refroidissement, à l'aide des nouveaux axes, si l'on y transforme le seul facteur U, lequel devra s'évanouir pour $x' = 0$, équation actuelle du plan P.

Or, toute somme linéaire (la plus générale) des sinus et cosinus des arcs polynômes (6) peut se développer ainsi :

$$(7) \qquad \mathsf{S}\, W' \sin \lambda' x' + \mathsf{S}\, W'' \cos \lambda' x' ;$$

les (W', W'') ne contenant que (y', z'). Chacune des deux sommes partielles (7), vérifiant séparément l'équation (4) transformée par (5), peut être prise exclusivement pour le facteur U, et dans le cas actuel, où U doit s'évanouir pour $x' = 0$, c'est la première qu'il faut adopter. Donc U sera une somme linéaire de termes de la forme $W' \sin \lambda' x'$ et changera de signe avec x', en conservant la même valeur absolue. Cette propriété, commune à tous les termes de la série transformée, s'étend à cette série elle-même. Donc la symétrie inverse existera à toute époque de part et d'autre du plan P.

[Citons ici, comme un simple corollaire, une seconde loi. Si la série trigonométrique (1), au lieu d'indiquer que le plan P conserve la température zéro, doit exprimer que ce plan n'est traversé par aucun flux ou reste imperméable, après la transformation précédente, la dérivée $\frac{dU}{dx'}$ devant s'annuler par $x' = 0$, c'est la seconde somme (7) qu'il faut adopter exclusivement : et U étant alors une somme linéaire de termes de la forme $W'' \cos \lambda' x'$, conservera la même valeur lors du changement de signe de x'. C'est-à-dire que la symétrie calorifique directe existera à toute époque de part et d'autre du plan P.]

§ LXXXV.

CONSÉQUENCES DE CETTE LOI.

La loi générale, qui vient d'être établie, indiquait, très-simplement, la possibilité de traiter les polyèdres définis dans les leçons précédentes. La série qui donne la loi du refroidissement du prisme rectangle, dont les trois côtés sont inégaux, quand ses faces sont entretenues à la température zéro, peut exprimer que la température reste aussi à zéro, sur d'autres plans, pourvu qu'ils soient parallèles à deux faces, et qu'ils partagent le côté perpendiculaire (a, ou b, ou c) en un nombre entier n de parties égales ; il suffit de ne prendre pour l'entier (i, ou i', ou i'') que des multiples de n. Mais la même série ne peut exprimer qu'un plan diagonal, tel que $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$, reste à zéro ; car la symétrie calorifique inverse ne saurait exister de part et d'autre de ce plan, puisque les faces ($x = 0$, $y = 0$) ou ($x = a$, $y = b$), qui ont la température zéro, ne sont pas symétriquement placées par rapport à ce plan diagonal. Cela n'est possible que si $b = a$, ou si le prisme est à base carrée ; alors, les deux plans diagonaux perpendiculaires à cette base, peuvent conserver, séparément ou à la fois, la température zéro ; mais pas les autres, tel que $\frac{z}{c} = \frac{x}{a}$, ou $\frac{y}{a} = \frac{z}{c}$, à moins que c ne soit aussi égal à a, ou que le polyèdre primitif ne soit un cube.

La même loi générale établit, clairement, qu'il ne sera possible d'exprimer la loi du refroidissement par communication d'un nouveau polyèdre, à l'aide d'une série trigonométrique et périodique, que si ce polyèdre est tel, que l'on puisse *paver* tout l'espace avec des polyèdres de même forme,

symétriquement placés, et de telle sorte que, les plans de leurs faces ayant la température zéro dans toute leur étendue, la symétrie calorifique inverse puisse exister par rapport à chacun de ces plans. Or il existe deux prismes triangulaires droits, autres que celui de M. Ostrogradski, qui satisfont complétement à toutes ces conditions. La base de l'un d'eux est le triangle équilatéral; celle de l'autre est la moitié du même triangle, ou bien le triangle rectangle dont l'hypoténuse est double d'un des côtés. On peut donc chercher l'expression du refroidissement par communication de ces deux prismes, par des séries trigonométriques et périodiques. Il suffira, d'ailleurs, d'obtenir la série du premier corps, car elle doit comprendre celle du second, comme la série du prisme à base carrée comprend celle du prisme triangulaire $\frac{1}{2}$.

§ LXXXVI.

PRISME TRIANGULAIRE RÉGULIER.

Il s'agit d'appliquer la solution générale du § LVII, au refroidissement par communication du prisme triangulaire de hauteur h, *régulier* ou dont la base est un triangle équilatéral. Prenant l'axe du prisme pour celui des z, et le centre O de la base pour origine, la fonction V peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad V = \sum u \sin i\pi \frac{z}{h} . e^{-\left[\theta^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}.$$

Pour que chaque terme simple vérifie séparément l'équation générale (1), § LVII, il faut que le facteur u, qui ne

contient que (x, y), vérifie l'équation particulière

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \theta^2 u = 0. \tag{9}$$

De plus, le terme simple s'évanouissant déjà sur les deux bases ($z = 0$, $z = h$), par le facteur en z, où i est un nombre entier, pour qu'il s'évanouisse pareillement sur les faces latérales, il faut que le facteur u s'annule sur les côtés de la base.

Telles sont toutes les conditions imposées à la fonction u. Afin de les traduire analytiquement : soient, respectivement, $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ les angles que font, avec l'axe des x, les perpendiculaires indéfinies, $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OP'}}$, $\overline{\mathrm{OP''}}$, abaissées du centre du triangle équilatéral sur ses côtés; on aura

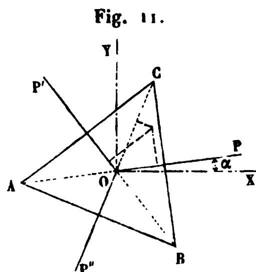
$$\alpha' = \alpha + \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha'' = \alpha + \frac{4\pi}{3}, \tag{10}$$

et si, par un même point du plan de la base, on mène trois droites respectivement parallèles aux côtés, leurs équations seront

$$\left\{\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= \mathrm{P}, \\ x\cos\alpha' + y\sin\alpha' &= \mathrm{P}', \\ x\cos\alpha'' + y\sin\alpha'' &= \mathrm{P}''; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$(\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'')$ étant les distances, à l'origine, des points où

Fig. 11.



ces droites viennent rencontrer les perpendiculaires $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$.

On peut regarder ces perpendiculaires comme étant les axes d'un système de trois coordonnées (P, P', P''), appartenant à un même point du plan de la base, et vérifiant la relation

$$P\sin(\alpha' - \alpha'') + P'\sin(\alpha'' - \alpha) + P''\sin(\alpha - \alpha') = 0$$

que l'on obtient en éliminant (x, y) entre les équations (11) et qui se réduit à

$$(12) \qquad P + P' + P'' = 0;$$

car, d'après les valeurs (10), les trois sinus facteurs sont égaux entre eux, et à $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Sur les axes $\overline{OP^{(j)}}$, qui sont dirigés suivant les trois hauteurs ou les trois médianes du triangle équilatéral, les coordonnées $P^{(j)}$ sont positives vers les côtés, négatives vers les sommets.

§ LXXXVII.

FORMATION DU TERME SIMPLE.

Maintenant, r étant la distance du centre aux côtés du triangle équilatéral, ou le tiers de sa hauteur, ou le rayon du cercle inscrit, l'équation à la surface est le groupe complet

$$(13) \qquad V_\sigma = 0, \text{ quand } \left\{ \begin{array}{l} z = 0; \quad z = h; \\ P = r; \quad P' = r; \quad P'' = r; \end{array} \right.$$

et, pour que la série (1) vérifie ce groupe, il faut que

$$(14) \qquad u = 0, \text{ quand } (P = r; \quad P' = r; \quad P'' = r).$$

De plus, pour que cette série soit trigonométrique, la fonc-

tion u doit être une somme linéaire de sinus ou cosinus d'arcs polynômes de la forme

$$(15)\qquad (lP + mP' + nP'')$$

différant par les constantes (l, m, n), mais de telle sorte, que l'équation (9) soit vérifiée avec la même θ^2 par tous les termes de cette somme.

Or l'arc (15) devenant, à l'aide des formules de transformation (11),

$$[(l\cos\alpha + m\cos\alpha' + n\cos\alpha'')x' + (l\sin\alpha + m\sin\alpha' + n\sin\alpha'')y],$$

son sinus ou son cosinus vérifiera l'équation (9) si

$$\theta^2 = l^2 + m^2 + n^2 + \\ 2mn\cos(\alpha' - \alpha'') + 2nl\cos(\alpha'' - \alpha) + 2lm\cos(\alpha - \alpha'),$$

ou, puisque, d'après les équations (10), les cosinus facteurs des trois derniers termes sont égaux entre eux, et à $\left(-\frac{1}{2}\right)$, si l'on a

$$(16)\qquad \theta^2 = (l^2 + m^2 + n^2) - (mn + nl + lm);$$

et, cette expression étant symétrique en (l, m, n), les sinus et cosinus des six arcs différents

$$(17)\qquad \begin{cases} (lP + mP' + nP''), & (nP + mP' + lP''), \\ (mP + nP' + lP''), & (mP + lP' + nP''), \\ (nP + lP' + mP''), & (lP + nP' + mP''), \end{cases}$$

vérifieront l'équation (9) avec ce même θ^2 (16).

La fonction u sera donc la somme de tous ces cosinus et sinus, multipliés par des coefficients indéterminés, et contiendra ainsi douze termes. Il restera à chercher quelles valeurs des constantes (l, m, n), quels rapports des douze coefficients, donnent à cette somme la propriété (14) de s'annuler sur le périmètre de la base. Recherche inévita-

blement longue et minutieuse, mais qui ne présente aucune difficulté particulière, et que nous supprimerons, en nous bornant à poser synthétiquement les résultats obtenus, et à constater qu'ils satisfont complétement aux conditions imposées.

§ LXXXVIII.

FACTEUR EN (x, y) DÉFINITIF.

Voici ce que l'on trouve. Les constantes (l, m, n) doivent être respectivement les produits d'un même facteur $\left(\frac{2\pi}{9r}\right)$, par trois nombres entiers (λ, μ, ν) positifs ou négatifs, vérifiant la relation

$$(18) \qquad \lambda + \mu + \nu = 0.$$

D'après cela, des deux parties de θ^2 (16), la seconde, avec son signe, est égale à la moitié de la première, et

$$(19) \qquad \theta^2 = \frac{2}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Les douze coefficients s'expriment linéairement à l'aide de deux d'entre eux, lesquels peuvent rester indépendants ; de telle sorte que la fonction totale u devient

$$(20) \qquad u = M_1 u_1 + M_2 u_2,$$

les fonctions partielles u_1 et u_2 satisfaisant, chacune séparément, à toutes les conditions.

La fonction (20), ainsi obtenue, est en quelque sorte indéterminée : car si l'on pose

$$M_1 = \beta_1 M'_1 + \gamma_1 M'_2, \qquad M_2 = \beta_2 M'_1 + \gamma_2 M'_2,$$
$$u'_1 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, \qquad u'_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2,$$

$(\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2)$ étant des constantes arbitraires, cette fonc-

tion u totale s'écrira ainsi :

$$u = M'_1 u'_1 + M'_2 u'_2,$$

et les nouvelles fonctions partielles u'_1 et u'_2 satisferont encore aux équations (9) et (14). Ce qui conduit à une infinité de formes différentes, toutes également admissibles. Mais, en assignant aux constantes (β_i, γ_i) des valeurs convenables, on obtient une forme qui donne, plus directement que toute autre, outre la série du prisme triangulaire régulier, celle du prisme dont la base est le triangle rectangle ayant l'hypoténuse double d'un côté; et c'est sous cette forme que nous présenterons la fonction totale u (20).

Prenant les six arcs polynômes différents

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{9r}(\lambda P + \mu P' + \nu P'' + 3\lambda r) = A_1,\\
&\frac{2\pi}{9r}(\mu P + \nu P' + \lambda P'' + 3\mu r) = A_2,\\
&\frac{2\pi}{9r}(\nu P + \lambda P' + \mu P'' + 3\nu r) = A_3,\\
&\frac{2\pi}{9r}(\nu P + \mu P' + \lambda P'' + 3\nu r) = A'_1,\\
&\frac{2\pi}{9r}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\mu r) = A'_2,\\
&\frac{2\pi}{9r}(\lambda P + \nu P' + \mu P'' + 3\lambda r) = A'_3,
\end{aligned}\right.$$

et désignant les cosinus et sinus de ces arcs par les simples lettres c et s, respectivement affectées des mêmes indices et accents que la lettre A, on a

$$(22)\qquad u_1 = \left\{\begin{aligned} & c_1 - c'_1\\ &+ c_2 - c'_2\\ &+ c_3 - c'_3, \end{aligned}\right. \qquad u_2 = \left\{\begin{aligned} & s_1 + s'_1\\ &+ s_2 + s'_2\\ &+ s_3 + s'_3. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit de constater que ces fonctions (22), qui vérifient

l'équation (9) avec le même θ^2 (19), satisfont aux conditions (14).

§ LXXXIX.

FORMATION DE LA SÉRIE TOTALE.

Mais il importe de savoir d'abord ce que devient la fonction u (20) quand deux des entiers (λ, μ, ν) sont égaux. Soit $\mu = \lambda$, et $\nu = -2\lambda$ d'après (18); par la substitution dans chaque arc (21), des trois coordonnées $P^{(j)}$ celle au facteur ν restera seule avec $-\frac{2\lambda\pi}{3r}$ pour coefficient, quand on aura remplacé la somme des deux autres par sa valeur déduite de (12); et l'on aura immédiatement

$$A'_2 = A_1 = \frac{2\lambda\pi}{3r}(r - P''),$$

$$A'_3 = A_2 = \frac{2\lambda\pi}{3r}(r - P'),$$

$$A'_1 = A_3 = \frac{2\lambda\pi}{3r}(r - P) - 2\lambda\pi.$$

Avec ces valeurs, dans les fonctions partielles (22), la seconde colonne détruit la première pour u_1, tandis qu'elle la double pour u_2. Ainsi u_1 n'existera pas, et si l'on pose, pour simplifier,

$$(23) \qquad r - P = p, \quad r - P' = p', \quad r - P'' = p'',$$

u_2 est égal à deux fois

$$(24) \qquad W = \sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p + \sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p' + \sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p''.$$

Donc, en remplaçant $2M_2$ par un nouveau coefficient N, la fonction u (20) se réduit à NW, quand deux des entiers (λ, μ, ν) sont égaux. Et, si l'on réunit les termes où le fac-

teur u a cette forme, la fonction V (8) se composera ainsi :

$$(25)\quad V = \left\{ \begin{aligned} &\sum (M_1 u_1 + M_2 u_2) \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\theta^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \\ &+ \sum NW \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\left(\frac{2\lambda\pi}{3r}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}, \end{aligned} \right.$$

la série double s'étendant à tous les entiers i et λ compris entre zéro et l'infini ; la série triple à toutes les valeurs de i, et des deux nombres essentiellement inégaux λ et μ, en prenant $\nu = -(\lambda + \mu)$.

§ XC.

VÉRIFICATION DE L'ÉQUATION A LA SURFACE.

On peut regarder les (p, p', p''), introduits dans W (24), comme formant un autre système de trois coordonnées, vérifiant la relation

$$(26)\qquad p + p' + p'' = 3r,$$

que donnent les équations (23) d'après l'identité (12). Ces coordonnées, toujours positives à l'intérieur du triangle équilatéral, ne sont autres que les perpendiculaires abaissées d'un même point sur les trois côtés. Avec ce système, les équations des côtés sont $(p = 0,\ p' = 0,\ p'' = 0)$. De là résulte que W (24) est nul sur le périmètre de la base : car, par exemple, lorsque $p = 0$, le premier terme s'évanouit, et le troisième détruit le second, puisque $p'' = 3r - p'$, d'après l'équation (26).

Revenons maintenant aux fonctions conjuguées (22), dans lesquelles les entiers (λ, μ, ν) sont inégaux, de telle sorte qu'aucune des différences

$$(27)\qquad \mu - \nu = \lambda_1,\quad \nu - \lambda = \mu_1,\quad \lambda - \mu = \nu_1,$$

ne soit nulle. La demi-somme et la demi-différence des

deux arcs A_1 et A'_3 (21), où la coordonnée P a le même facteur λ, sont, en observant que $(\mu+\nu)(P'+P'')$ est égal à λP, d'après les équations (12) et (18), et introduisant, pour simplifier, λ_1 (27) :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{A_1+A'_3}{2} &= \frac{\lambda\pi}{3r}(P+2r),\\ \frac{A_1-A'_3}{2} &= \frac{\lambda_1\pi}{9r}(P'-P''). \end{aligned}\right.$$

Le double du sinus du premier des arcs (28), successivement multiplié par le sinus et le cosinus du second, donnera respectivement la différence $(c_1-c'_3)$ pour u_1, et la somme $(s_1+s'_3)$ pour u_2. Le couple (A_2, A'_2) où P a le facteur μ, et le couple (A_3, A'_1) où P a le facteur ν, donneront des résultats homologues. Et l'on aura définitivement

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= 2\left\{\begin{aligned} &\sin\frac{\lambda\pi}{3r}(P+2r)\sin\frac{\lambda_1\pi}{9r}(P'-P'')\\ &+\sin\frac{\mu\pi}{3r}(P+2r)\sin\frac{\mu_1\pi}{9r}(P'-P'')\\ &+\sin\frac{\nu\pi}{3r}(P+2r)\sin\frac{\nu_1\pi}{9r}(P'-P'');\end{aligned}\right.\\ u_2 &= 2\left\{\begin{aligned} &\sin\frac{\lambda\pi}{3r}(P+2r)\cos\frac{\lambda_1\pi}{9r}(P'-P'')\\ &+\sin\frac{\mu\pi}{3r}(P+2r)\cos\frac{\mu_1\pi}{9r}(P'-P'')\\ &+\sin\frac{\nu\pi}{3r}(P+2r)\cos\frac{\nu_1\pi}{9r}(P'-P'').\end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

Or (λ, μ, ν) étant des nombres entiers, ces valeurs (29) s'annulent quand $P=r$; car le premier facteur de chaque ligne devient le sinus d'un multiple de π. Donc les fonctions u_1 et u_2 (22) vérifient la première (14).

Les arcs (A_3, A'_2) où P' a le facteur λ donnent, en rem-

plaçant $(\mu+\nu)(P''+P)$ par $\lambda P'$, et $3(\mu+\nu)r$ par $-3\lambda r$, la première du groupe

$$\frac{A_3+A'_2}{2}=\frac{\lambda\pi}{3r}(P'-r),$$

$$\frac{A_1+A'_1}{2}=\frac{\mu\pi}{3r}(P'-r),$$

$$\frac{A_2+A'_3}{2}=\frac{\nu\pi}{3r}(P'-r),$$

les deux autres s'obtenant de la même manière. Les sinus de ces demi-sommes entrent respectivement comme facteurs, dans les trois différences $(c_3-c'_2)$, $(c_1-c'_1)$, $(c_2-c'_3)$, composant u_1, et dans les trois sommes $(s_3+s'_2)$, $(s_1+s'_1)$, $(s_2+s'_3)$, composant u_2. Or ces sinus s'annulent avec leurs arcs quand $P'=r$; donc les fonctions u_1 et u_2 vérifient la seconde (14). En groupant les arcs (21) par les facteurs de P'', on constate pareillement que u_1 et u_2 s'évanouissent quand $P''=r$.

§ XCI.

FORMULE GÉNÉRALE DES COEFFICIENTS.

Ainsi tous les facteurs (W, u_1, u_2) vérifient le groupe partiel (14), et puisque les sinus en z s'annulent sur les deux bases, la fonction V (25) satisfait au groupe complet (13) de l'équation à la surface. Cette fonction (25) exprime donc la loi intégrale du refroidissement par communication du prisme triangulaire régulier. Il reste à déterminer les coefficients (N, M_1, M_2) quand l'état initial f est donné. S'il s'agit d'isoler N, le théorème général du § LVIII suffit; mais pour isoler M_1 et M_2, il faut y joindre ce théorème particulier que, u_1 et u_2 étant les deux fac-

teurs (22) correspondant au même θ^2, l'intégrale

$$\int_{\varpi} d\varpi \, . \, u_1 u_2 \sin^2 i\pi \frac{z}{h}$$

est zéro. En effet, sur l'axe $\overline{\text{OP}}$ on a évidemment $\text{P}' = \text{P}''$, et m, m' étant deux points symétriquement placés par rapport à cet axe, pour passer de m à m', comme on le reconnaît facilement, il suffit de changer P' en P'' et P'' en P'; alors, u_2 (29) reste le même, tandis que u_1 change de signe en conservant la même valeur absolue; l'intégrale précédente est donc nulle, comme étant composée d'éléments, positifs et négatifs, en même nombre et qui se détruisent.

De là résulte la formule générale

$$\mathfrak{M} = \frac{\int_{\varpi} d\varpi \, . \, \text{f}\mho \sin i\pi \frac{z}{h}}{\int_{\varpi} d\varpi \, . \, \mho^2 \sin^2 i\pi \frac{z}{h}},$$

$\mathfrak{M}$ étant successivement $(\text{N}, \text{M}_1, \text{M}_2)$ quand $\mho$ est respectivement (W, u_1, u_2). Le signe des intégrations se décompose ainsi

$$\int_{\varpi} d\varpi \ldots = \int_0^h dz \int_{\sigma} d\sigma \ldots$$

$d\sigma$ étant un élément de surface, et $\int_{\sigma}$ indiquant une intégration faite sur tout le triangle équilatéral. D'où résulte la formule définitive

(30) $$\mathfrak{M} = \frac{2}{h} \frac{\int_0^h dz \int_{\sigma} d\sigma \, . \, \text{f}\mho \sin i\pi \frac{z}{h}}{\int_{\sigma} d\sigma \, . \, \mho^2},$$

en remplaçant, au dénominateur, l'intégrale définie en z par $\frac{h}{2}$.

§ XCII.

GROUPE COORDONNÉ POUR LES INTÉGRATIONS.

On peut prendre pour $d\sigma$ le parallélogramme élémentaire, formé par des parallèles aux côtés ($p' = 0$, $p'' = 0$), dont la hauteur est dp'', et la base le quotient de dp' par $\sin\frac{2\pi}{3}$; ce qui donne

$$d\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dp'\, dp''.$$

Il faut ensuite exprimer les fonctions ($\mho$, f) à l'aide des deux seules coordonnées p' et p'', en y faisant

(31) $\quad P' = r - p', \quad P'' = r - p'', \quad P = p' + p'' - 2r.$

Enfin, regardant p' comme constant, on intègre d'abord en p'' depuis le côté $p'' = 0$, jusqu'à celui $p = 0$, où $p'' = 3r - p'$; puis on intègre en p' depuis le côté $p' = 0$, jusqu'au sommet opposé, où $p' = 3r$. De telle sorte que

(32) $$\int_\sigma d\sigma \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{3r} dp' \int_0^{3r-p'} dp'' \ldots.$$

Toutefois, pour obtenir le dénominateur de (30), on peut étendre l'intégration en p'', comme celle en p', de 0 à $3r$, et prendre la moitié du résultat, ou

(33) $$\int_\sigma d\sigma . \mho^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{3r} dp' \int_0^{3r} dp''\, \mho^2.$$

Car, le plan $P = r$ étant à zéro, la symétrie calorifique inverse existe de part et d'autre de ce plan, § LXXXIV, et $\mho^2$

retrouve les mêmes valeurs positives dans les deux moitiés du losange dont le côté $P = r$ est la diagonale. Au lieu du couple coordonné (p', p''), on peut prendre, ou (p'', p), ou (p, p'). D'après cela le dénominateur de N se calcule facilement.

En effet, quand $\mho$ est W (24), l'intégrale totale (33) se compose de trois intégrales partielles aux carrés des sinus, et de trois autres aux doubles produits; or, en changeant le couple coordonné de l'une à l'autre, on voit que les trois premières doivent avoir une même valeur, ainsi que les trois dernières, et puisque

$$\int_0^{3r} d\alpha = 3r, \int_0^{3r} \sin^2 \frac{2\lambda\pi}{3r}\alpha . d\alpha = \frac{3r}{2}, \int_0^{3r} \sin \frac{2\lambda\pi}{3r}\alpha . d\alpha = 0,$$

l'intégrale totale se réduit à trois fois le produit de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ par $\frac{9r^2}{2}$; on a donc

$$\int_\sigma d\sigma \, W^2 = \frac{9r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi la valeur générale (30), pour le coefficient N, est

$$(34) \qquad N = \frac{4}{9r^2 h\sqrt{3}} \int_0^h dz \int_\sigma d\sigma . f W \sin i\pi \frac{z}{h}.$$

Le calcul direct de l'intégrale totale (33) quand $\mho$ est u_1 ou u_2, est beaucoup plus long. Il faut d'abord exprimer les arcs (21) en p', p''. A l'aide des formules de transformation (31), de la relation (12), et en introduisant les différences $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ (27), on trouve

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{2\pi}{9r}(\nu_1 p' - \mu_1 p'') = A_1, & \frac{2\pi}{9r}(\mu_1 p'' - \lambda_1 p') = A'_1, \\ \frac{2\pi}{9r}(\lambda_1 p' - \nu_1 p'') = A_2, & \frac{2\pi}{9r}(\lambda_1 p'' - \nu_1 p') = A'_2, \\ \frac{2\pi}{9r}(\mu_1 p' - \lambda_1 p'') = A_3, & \frac{2\pi}{9r}(\nu_1 p'' - \mu_1 p') = A'_3. \end{cases}$$

Il importe de remarquer ici, que les équations posées (27) conduisent aux relations

$$(36)\quad \begin{cases} \lambda_1+\mu_1+\nu_1=0, \\ \nu_1-\mu_1=3\lambda, \quad \lambda_1-\nu_1=3\mu, \quad \mu_1-\lambda_1=3\nu, \end{cases}$$

desquelles les trois dernières établissent la congruence multiple

$$(37)\qquad \lambda_1\equiv\mu_1\equiv\nu_1 \quad (\text{mod. } 3).$$

Les trois nouveaux nombres entiers $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, desquels un au moins est négatif et aucun n'est zéro, ont donc leur somme nulle, comme les (λ, μ, ν); mais ils s'en distinguent essentiellement par cette propriété, qu'étant divisés par 3, ils donnent tous le même reste (ou 0, ou $+1$, ou $+2$).

§ XCIII.

ÉVALUATION DU DÉNOMINATEUR.

Avec u_1 ou u_2 (22) au lieu de $\mho$, l'intégrale totale (33) se compose de dix intégrales partielles aux carrés des cosinus ou sinus, et de quinze autres aux doubles produits. Comme on pouvait le présumer, ces dernières étant réunies donnent toujours zéro, et les six premières conduisent à la valeur totale $9r^2\sqrt{3}$. Constatons d'abord ce dernier fait. La double intégration (33) relativement au carré du cosinus ou du sinus de l'arc A_1 (35), peut s'indiquer ainsi

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{3r}dp'\int_0^{3r}dp''\left[1\pm\cos\frac{4\pi}{9r}(\nu_1p'-\mu_1p'')\right].$$

En l'effectuant, on a, pour le premier terme 1 de la paren-

thèse, $\frac{9r^2}{2\sqrt{3}}$, et pour le second

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{9r}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\mu_1\nu_1}\left[\cos\frac{4(\nu_1-\mu_1)\pi}{3}-\cos\frac{4\mu_1\pi}{3}-\cos\frac{4\nu_1\pi}{3}+1\right],$$

ou bien, en remarquant que le premier terme de la dernière parenthèse est l'unité d'après une des relations (36), que le second et le troisième ont une même valeur, $-\gamma$, d'après la congruence multiple (37), plus simplement

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{9r}{4\pi}\right)^2\frac{1-\gamma}{\mu_1\nu_1}.$$

Cette dernière partie est nulle quand $\gamma=1$, c'est-à-dire quand les $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sont congrus à zéro, ou tous divisibles par 3.

Si cela n'est pas, répétant la même suite d'opérations sur chacun des carrés des cosinus ou sinus des autres arcs (35), puis additionnant les six résultats, on aura évidemment

$$\left[9r^2\sqrt{3}\pm\frac{2(1-\gamma)}{\sqrt{3}}\left(\frac{9r}{4\pi}\right)^2\frac{\lambda_1+\mu_1+\nu_1}{\lambda_1\mu_1\nu_1}\right],$$

et la seconde partie de cette expression s'évanouit, puisque aucune des différences $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ n'est nulle tandis que leur somme l'est. Des conclusions semblables à cette dernière, et auxquelles on arrive par des calculs analogues aux précédents, démontrent la disparition des quinze intégrales partielles aux doubles produits, soit isolées, soit réunies, suivant les trois cas de la congruence multiple (37). Cette dernière démonstration, inévitablement longue, ne rencontre aucune difficulté nouvelle. On a donc définitivement

$$(38)\qquad \int_\sigma d\sigma\,.\,u_1^2=\int_\sigma d\sigma\,.\,u_2^2=9r^2\sqrt{3}.$$

Ainsi quand $\mho$ est u_1 ou u_2, la valeur générale (30) donne, pour M_1 ou M_2,

$$(39) \qquad M_j = \frac{2}{9r^2h\sqrt{3}} \int_0^h dz \int_\sigma d\sigma . \mathrm{f} u_j \sin i\pi \frac{z}{h}.$$

Enfin, avec les expressions (34) et (39) de ses coefficients, la fonction V (25) permettra d'évaluer, numériquement, les températures variables des points du prisme triangulaire régulier, totalement immergé dans un bain à zéro, quelque compliqué que soit l'état initial.

DIXIÈME LEÇON.

PRISME TRIANGULAIRE HÉMIRÉGULIER.

Refroidissement par communication du prisme triangulaire hémirégulier. — Cas de l'état initial constant du prisme régulier, et de l'hémirégulier. — Refroidissement lorsque les faces latérales sont imperméables.

---

§ XCIV.

GROUPES DE SÉRIES DISTINCTS.

Les séries trigonométriques et périodiques, qui résolvent analytiquement le problème du refroidissement de divers corps de forme polyédrique, constituent réellement deux groupes distincts. Dans le premier, toutes les solutions particulières ne sont que des conséquences de celle du prisme rectangle. Dans le second, les solutions particulières proviennent de celle du prisme triangulaire régulier. Les deux séries primitives, qui servent de bases aux deux groupes, ont des formes essentiellement différentes : dans celle du prisme rectangle, le facteur de l'exponentielle, pour chaque terme simple, est le produit de trois sinus ou cosinus, dont les arcs ne varient chacun qu'avec une seule des coordonnées ; dans celle du prisme triangulaire régulier, le facteur en (x, y) est une somme linéaire de sinus ou cosinus d'arcs polynômes. C'est ainsi que chacune signale ses propriétés caractéristiques, qui seraient masquées, ou resteraient inaperçues, si l'on ramenait les deux séries à une forme commune.

La première série générale, très-anciennement connue, et qu'on peut dire classique, a pu nous conduire rapidement à ses diverses conséquences. Mais la seconde, plus récemment introduite, exige des vérifications plus développées ; et, pour achever son étude, il est indispensable de prolonger, ici, la suite des numéros d'ordre donnés aux formules de la leçon précédente, que nous serons obligé de citer à chaque nouveau pas.

§ XCV.

PRISME TRIANGULAIRE HÉMIRÉGULIER.

Lorsque, dans la fonction V (25), on remplace P′ par P″ et P″ par P′, les termes aux facteurs W (24) et u_2 (29) restent invariables, tandis que ceux aux facteurs u_1 (29) changent de signe en conservant la même valeur absolue. De là résulte que, si l'état initial apporte une symétrie calorifique inverse par rapport au plan P″ = P′, tous les coefficients N et M_2 disparaissent, et ceux M_1 restent seuls : car, dans les deux moitiés du prisme triangulaire régulier découpées par le plan P″ = P′ les trois produits fW, fu_2, fu_1, retrouvent alors les mêmes valeurs absolues, mais fW et fu_2 avec des signes contraires, et fu_1, avec les mêmes signes ; les intégrales (34) et (39) se composent donc chacune de deux intégrales partielles, qui se détruisent pour N et pour M_2, et qui se doublent pour M_1.

La série V (25), ainsi réduite à

$$(40) \qquad V = \sum\!\!\!\sum M_1 u_1 \sin i\pi \frac{z}{h}\, e^{-\left[\theta^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}$$

sera nulle avec les facteurs u_1, et à toute époque, sur le plan P″ = P′ ; et, par suite de l'existence de ce plan à zéro, la symétrie inverse de l'état initial sera conservée

pendant toute la durée du refroidissement. La série (40), qui n'est que particulière quand il s'agit du prisme triangulaire régulier, est générale pour sa moitié, ou pour le prisme triangulaire, que nous appellerons *hémirégulier*, et dont la base est le triangle rectangle ayant son hypoténuse, $2r\sqrt{3}$, double de l'un des deux autres côtés, lesquels sont $(r\sqrt{3}, 3r)$.

Si l'on adopte le prisme dont la base est la moitié ACP″ du triangle équilatéral de la figure 11 page 154, l'équation à la surface est alors le groupe suivant :

$$(41) \qquad V_\sigma = 0, \quad \text{quand} \left\{ \begin{array}{lll} & z = 0; \quad z = h; & \\ P = r, & \text{ou} & p = 0; \\ P' = r, & \text{ou} & p' = 0; \\ P'' = P', & \text{ou} & p'' = p'. \end{array} \right.$$

Le coefficient M_1 a la valeur (30), en remplaçant $\mho$ par u_1, avec le signe de double intégration

$$\int_\sigma d\sigma \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{3}{2}r} dp' \int_{p'}^{3r-p'} dp'' \ldots$$

et prenant pour l'intégrale du dénominateur la moitié de la valeur (38); d'où

$$(42) \quad M_1 = \frac{8}{27 r^3 h} \int_0^h dz \int_0^{\frac{3}{2}r} dp' \int_{p'}^{3r-p'} dp''. \, \mathrm{f} u_1 \sin i\pi \frac{z}{h}.$$

Avec cette expression de ses coefficients, la série (40) donnera la loi du refroidissement par communication du nouveau corps, quelque compliqué que soit l'état initial.

§ XCVI.

RETOUR AU RÉGULIER.

On voit avec quelle facilité la solution du second des deux prismes triangulaires, annoncés au § LXXXV, se déduit de celle du premier. Mais cet avantage n'est acquis qu'en troublant la symétrie des coordonnées $P^{(j)}$. Car il a fallu, pour obtenir ce résultat, donner à $3r$ dans chaque arc (21) le même facteur qu'à P. C'est par suite de cette sorte de préférence attribuée à la coordonnée P, que la fonction u (20) prend la forme

$$u = M_1 u_1 + M_2 u_2, \tag{43}$$

où la fonction partielle u_2 (29) est symétrique en P' et P'', et où celle u_1 s'annule quand $P'' = P'$, c'est-à-dire sur l'axe OP. Si l'on donnait à $3r$ dans chaque arc (21) le même facteur qu'à P', cette fonction deviendrait

$$u = M'_1 u'_1 + M'_2 u'_2, \tag{43'}$$

u'_2 étant symétrique en P'' et P, u'_1 s'annulant pour $P = P''$, ou sur l'axe OP'. Et si l'on préférait P'', cette fonction serait

$$u = M''_1 u''_1 + M''_2 u''_2, \tag{43''}$$

u''_2 étant symétrique en P et P', u''_1 s'annulant pour $P' = P$ ou sur l'axe OP''. Ces trois formes de la fonction u sont nécessairement équivalentes.

Elles sont d'ailleurs identiques, lorsque les trois entiers (λ, μ, ν), divisés par 3, donnent le même reste δ (ou o, ou $+1$, ou $+2$). Car, dans tous les arcs (21), le terme en $3r$ prenant la forme $\frac{2\pi}{9r}(3r\delta) + 2j\pi$, on peut, sans altérer les

sinus ou cosinus qui composent les fonctions (22), ou supprimer l'entier j, ou bien le changer en prenant pour facteur de $3r$ dans chaque arc un quelconque des entiers (λ, μ, ν). De là résulte que (u_1, u'_1, u''_1) sont identiques ainsi que (u_2, u_2, u''_2),

Nous désignerons la fonction u correspondant à ce cas, par

$$(44) \qquad v = \mathfrak{M}\, v_1 + \mathfrak{M}_2 v_2.$$

Les arcs (21) étant tous exprimés avec le même facteur δ pour $3r$, v_2 est complétement symétrique en (P, P', P''), et s'annule sur les trois axes

$$(45) \qquad P' = P'', \quad P'' = P, \quad P = P'.$$

De telle sorte qu'en détachant, de la triple série Λ (25), tous les termes où

$$(46) \qquad \lambda \equiv \mu \equiv \nu \quad (\text{mod. } 3),$$

pour composer la série partielle

$$(47) \qquad \sum (\mathfrak{M}_1 v_1 + \mathfrak{M}_2 v_2) \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\rho^2 + \left(\frac{i\pi}{4}\right)^2\right]\frac{t}{k}};$$

cette série sera telle que, si les termes au facteur v_2 existent seuls, la symétrie calorifique directe existera par rapport à chacun des trois plans (45); et que, si les termes en v_1 sont seuls, les trois plans (45) resteront à zéro, et la symétrie calorifique inverse aura lieu pour chacun d'eux. On remarquera que la congruence multiple (46) donne, pour les différences (27), celle-ci :

$$(48) \qquad \lambda_1 \equiv \mu_1 \equiv \nu_1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3).$$

§ XCVII.

RELATIONS DES FACTEURS EN (x, y).

Par le départ de (47), la triple série de V (25) ne contient plus que des termes simples où (λ, μ, ν) ne satisfont pas à la congruence multiple (46). Les trois formes (43) de la fonction u sont alors distinctes. Mais il existe une quatrième forme, indifférente entre (P, P′, P″), qui reproduit les trois premières en groupant diversement ses termes. On l'obtient comme il suit. Les entiers (λ, μ, ν) dont la somme est nulle, donnant maintenant des restes différents lors de la division par 3, on conclut facilement que ces restes seront $(0, +1, +2)$ dans un ordre quelconque, et que les restes correspondants des différences $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ seront tous, ou $+1$, ou $+2$; de là résultent les deux identités

$$(49)\quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{2\lambda_1\pi}{3} = \cos\frac{2\mu_1\pi}{3} = \cos\frac{2\nu_1\pi}{3} = \gamma, \\ \sin\frac{2\lambda_1\pi}{3} = \sin\frac{2\mu_1\pi}{3} = \sin\frac{2\nu_1\pi}{3} = \sigma, \end{array} \right.$$

γ étant toujours $\left(-\frac{1}{2}\right)$, et σ étant $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ suivant que le reste commun aux $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sera $(+1)$, ou $(+2)$.

La somme u_2 (22) des sinus des arcs (21) peut s'exprimer en (u'_1, u'_2). En effet, si l'on remplace respectivement, dans les trois premiers arcs, les facteurs (λ, μ, ν) de $3r$ par leurs valeurs $(\mu+\nu_1, \nu+\lambda_1, \lambda+\mu_1)$ déduites des (27), et, dans les trois derniers, les facteurs (ν, μ, λ) de $3r$ par les valeurs $(\mu-\lambda_1, \lambda-\nu_1, \nu-\mu_1)$ provenant de la même source, ces arcs primitivement destinés aux (u_1, u_2) comprendront les seconds arcs destinés aux (u'_1, u'_2), avec les termes addition-

nels positifs $\left(\frac{2\nu_1\pi}{3}, \frac{2\lambda_1\pi}{3}, \frac{2\mu_1\pi}{3}\right)$ dans les trois premiers, et ceux négatifs $\left(-\frac{2\lambda_1\pi}{3}, -\frac{2\nu_1\pi}{3}, -\frac{2\mu_1\pi}{3}\right)$ dans les trois derniers. Si on développe ensuite les sinus (22), ainsi transformés, de manière à isoler les seconds arcs, on aura évidemment, d'après les identités (49),

$$u_2 = \gamma u'_2 + \sigma u'_1.$$

Pareillement on introduira les *troisièmes* arcs destinés aux (u''_1, u''_2), en remplaçant les facteurs de $3r$, (λ, μ, ν) par $(\nu - \mu_1, \lambda - \nu_1, \mu - \lambda_1)$ dans les trois premiers (21), (ν, μ, λ) par $(\lambda + \mu_1, \nu + \lambda_1, \mu + \nu_1)$ dans les trois derniers; et, en développant les sinus (22) il viendra

$$u_2 = \gamma u''_2 - \sigma u''_1.$$

On a ainsi la première ligne du groupe suivant :

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_2 &= \gamma u'_2 + \sigma u'_1 = \gamma u''_2 - \sigma u''_1, \\ u'_2 &= \gamma u''_2 + \sigma u''_1 = \gamma u_2 - \sigma u_1, \\ u''_2 &= \gamma u_2 + \sigma u_1 = \gamma u'_2 - \sigma u'_1; \end{aligned} \right.$$

les deux autres lignes s'obtiennent de la même manière, en partant des arcs destinés aux (u'_1, u'_2), aux (u''_1, u''_2). Or, γ étant $\left(-\frac{1}{2}\right)$, la sommation des trois lignes (50) donne

$$\frac{3}{2}(u_2 + u'_2 + u''_2) = \sigma(u_1 + u'_1 + u''_1) = -\sigma(u_1 + u'_1 + u''_1),$$

et σ $\left[\text{qui est } \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ n'étant pas nul, on conclut successivement les deux relations remarquables

$$(51) \qquad u_1 + u'_1 + u''_1 = 0, \quad u_2 + u'_2 + u''_2 = 0.$$

Si l'on ajoute les deux valeurs de u_2 de la première ligne (50),

on a

$$2u_2 = \gamma\,(u'_2 + u''_2) + \sigma\,(u'_1 - u''_1),$$

ou, d'après la seconde (51), et puisque $\gamma = -\frac{1}{2}$, l
mière de ce groupe

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} u_2 &= \frac{2}{3}\sigma\,(u'_1 - u''_1),\\ u'_2 &= \frac{2}{3}\sigma\,(u''_1 - u_1),\\ u''_2 &= \frac{2}{3}\sigma\,(u_1 - u'_1),\end{aligned}\right.$$

que complètent les deux dernières lignes (50).

§ XCVIII.

SÉRIE SYMÉTRIQUE POUR LE RÉGULIER.

De là résulte enfin que, dans les termes de la sér
ple (25), où les entiers (λ, μ, ν) ne satisfont pas à la
gruence multiple (46), le facteur u admet la forme in
rente

$$(53)\qquad u = \mathfrak{M}\,u_1 + \mathfrak{M}'\,u'_1 + \mathfrak{M}''\,u''_1.$$

En effet, avec cette forme on reproduit facilement
quelconque des (43) : remplaçant les deux derniers t
de (53) par

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')(u'_1 + u''_1) + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'')(u'_1 - u''_1),$$

$(u'_1 + u''_1)$ par $(-u_1)$, $(u'_1 - u''_1)$ par $\left(\frac{3}{2\sigma}u_2\right)$, d'apr

premières (51) et (52), et posant

$$\mathfrak{N} - \frac{1}{2}(\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'') = \mathrm{M}_1, \quad \frac{3}{4\sigma}(\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}'') = \mathrm{M}_2,$$

on a définitivement la première des formes (43); on arrive aux deux autres par des substitutions et des groupements homologues.

Si l'on adopte la forme (53) du facteur u dans la seconde série partielle, qui jointe à la première (47) complète la triple série de V (25), cette fonction devient

$$(54)\quad \mathrm{V} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\!\!\sum\!\!\sum (\mathfrak{N} u_1 + \mathfrak{N}' u'_1 + \mathfrak{N}'' u''_1) \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\theta^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \\ + \sum\!\!\sum\!\!\sum (\mathfrak{M}_1 v_1 + \mathfrak{M}_2 v_2) \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\tau^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \\ + \sum\!\!\sum \mathrm{NW} \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\left(\frac{2\lambda\pi}{3r}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}; \end{array} \right.$$

en remplaçant θ^2 par τ^2 dans la seconde ligne pour indiquer que les entiers (λ, μ, ν) ont changé de nature, et rappelant que, dans la première, l'identité $(u_1 + u'_1 + u''_1 = 0)$ a toujours lieu. L'expression de la loi intégrale du refroidissement par communication du prisme triangulaire régulier, étant ainsi développée, conduit plus rapidement que celle (25) à la détermination des coefficients, lorsque l'état initial apporte certaines symétries calorifiques, qui doivent persister pendant toute la durée du refroidissement.

Si la fonction f est complétement symétrique en (P, P', P''), ou qu'elle apporte une symétrie calorifique directe par rapport aux trois plans (45), les termes aux facteurs (u_1, u'_1, u''_1, v_1), qui ne peuvent l'admettre, disparaissent par leurs coefficients, et la fonction V (54) se ré-

duit à

$$(55)\quad V = \left\{ \begin{aligned} & \sum \mathfrak{M}_2 \nu_2 \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\tau^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \\ & + \sum NW \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\left(\frac{2\lambda\pi}{3r}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients ($\mathfrak{M}_2$, N) seront donnés par les formules (39) et (34), avec ν_2 au lieu de u_j, et avec le signe de double intégration (32). Pour donner un exemple de l'évaluation numérique de ces coefficients, considérons maintenant le cas où f est constant et égal à l'unité, lequel cas satisfait complétement à toutes les conditions restrictives de la fonction particulière V (55).

§ XCIX.

CAS DE SON ÉTAT INITIAL CONSTANT.

Le facteur f étant l'unité, dans les deux intégrales multiples (34) et (39), l'intégrale définie simple en z sera $\frac{2h}{i\pi}$ avec i impair $(2j+1)$. Pour N (34), la double intégrale de W (24) sera égale à trois fois celle d'un des trois sinus, par suite de l'indifférence du couple coordonné; d'où

$$\int_\sigma d\sigma . W = \frac{9r^2\sqrt{3}}{\lambda\pi};$$

et la valeur numérique complète du coefficient N sera

$$N = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2j+1)\lambda}.$$

Dans $\mathfrak{M}_2$ (39) pour obtenir la double intégration sur ν_2,

il faut l'effectuer partiellement sur chacun des sinus (22), écrits avec les arcs (35), mais en observant que les entiers $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, desquels aucun n'est nul, vérifiant actuellement la congruence multiple (48), on doit leur substituer trois multiples de 3, $(3l_1, 3m_1, 3n_1)$. Cette substitution étant faite, avec le premier sinus (22) on aura successivement

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{3r} dp' \int_0^{3r-p'} dp'' . \sin \frac{2\pi}{3r}(n_1 p' - m_1 p'')$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3r}{2m_1\pi}\right)\int_0^{3r} dp'\left(\cos \frac{2l_1\pi}{3r}p' - \cos \frac{2n_1\pi}{3r}p'\right) = 0,$$

en remplaçant, lors de la première intégration définie, $(n_1 + m_1)$ par $(-l_1)$; et remarquant que la seconde intégration, indéfinie, donne deux sinus qui s'évanouissent aux deux limites, tandis qu'aucun des nombres (l_1, m_1, n_1) n'est zéro. Les cinq autres intégrales partielles seront pareillement nulles. On a donc définitivement $\mathfrak{M}_2 = 0$.

La loi intégrale du refroidissement du prisme triangulaire régulier, primitivement à la température 1, et totalement immergé dans un bain à zéro, sera donc donnée par la série double

$$(56)\quad V = \frac{8}{\pi^2}\sum \frac{W}{\lambda}\,\frac{\sin(2j+1)\pi\frac{z}{h}}{2j+1}\cdot e^{-\left[\left(\frac{2\lambda\pi}{3r}\right)^2+\left(\frac{2j+1.\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}$$

ou par le produit des deux séries simples

$$(57)\quad \begin{cases} V_y = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\sin(2j+1)\pi\frac{z}{h}}{2j+1}e^{-\left(\frac{2j+1.\pi}{h}\right)^2\frac{t}{k}}, \\ V_\Delta = \frac{2}{\pi}\sum \frac{W}{\lambda}e^{-\left(\frac{2\lambda\pi}{3r}\right)^2\frac{t}{k}}, \end{cases}$$

desquelles la seconde doit se réduire à l'unité, comme la

première, quand $t = 0$, afin que l'état initial soit reproduit. D'où résulte ce théorème d'analyse, que la série trigonométrique simple

$$(58) \qquad \sum \frac{\sin \frac{2\lambda\pi}{3r} p + \sin \frac{2\lambda\pi}{3r} p' + \sin \frac{2\lambda\pi}{3r} p''}{\lambda}$$

est invariablement $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ à l'intérieur du triangle équilatéral, tandis qu'elle est essentiellement zéro sur son périmètre.

Le cas actuel peut être aussi traité en partant de la série (25), plus simple en apparence que celle (54). Mais si les termes aux facteurs u_1 disparaissent, dès l'abord, par leur coefficient M_1 dont l'intégrale est alors évidemment nulle, on ne parvient à constater l'annulation du coefficient M_2, qu'à la suite de calculs beaucoup plus longs que les précédents. Les entiers (λ, μ, ν), dont la somme est toujours nulle, n'étant assujettis qu'à la condition d'être tous trois inégaux, leurs différences $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, dont aucune n'est zéro, donnent toujours le même reste lors de la division par 3, et ce reste est, ou 0, ou $+1$, ou $+2$, sans distinction préalable. Il faut calculer toutes les intégrales partielles correspondant aux sinus (22), lesquelles ne sont plus nécessairement nulles chacune séparément, et ce n'est qu'après avoir obtenu leur somme, qui est

$$\frac{9 r^2 \sqrt{3}\, \sigma}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1}{\lambda_1 \mu_1 \nu_1},$$

que l'on reconnaît sa valeur zéro, par $\sigma = 0$ si les $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sont divisibles par 3, et, dans tous les cas, par

$$(59) \qquad \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0,$$

identité que l'on obtient en ajoutant les trois équations (27) respectivement multipliées par (λ, μ, ν).

§ C.

MÊME CAS POUR L'HÉMIRÉGULIER.

Si la forme générale (54) conduit plus rapidement que la forme (25) aux séries particulières (55) et (56), il n'en est plus ainsi quand il s'agit de parvenir à la série (40) : car, lorsque l'état initial apporte une symétrie calorifique inverse par rapport à un seul des plans (45), il faut essentiellement mettre la fonction V (54) sous la forme (25) exprimée, soit en (u_1, u_2), soit en (u'_1, u'_2), soit en (u''_1, u''_2), pour distinguer, avec certitude, les termes qui doivent disparaître, et ceux qui doivent rester. Mais cette série (40), qui est la série générale pour le prisme hémirégulier, n'a pas acquis la propriété des calculs rapides.

Lors de l'état initial constant de ce dernier corps, le coefficient M_1 (42), avec $f = 1$, et avec la valeur $\frac{2h}{2j+1.\pi}$ de l'intégrale définie en z, devient

$$M_1 = \frac{2}{2j+1.\pi}\cdot\frac{8}{27r^2}\cdot\int_0^{\frac{3r}{2}} dp' \int_{p'}^{3r-p'} dp''.u_1;$$

pour obtenir sa valeur numérique, il faut effectuer séparément la double intégration en p'' et p', sur tous les cosinus (22) écrits avec les arcs (35); les six intégrales partielles obtenues, étant réunies, leur somme, simplifiée par diverses réductions, donne, pour l'intégrale totale, l'expression

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{3r}{2}} dp' \int_{p'}^{3r-p'} dp''.u_1 = -\frac{27r^2}{\pi^2}\times \\ \displaystyle\left(\frac{1-\cos\lambda\pi}{\lambda\lambda_1}+\frac{1-\cos\mu\pi}{\mu\mu_1}+\frac{1-\cos\nu\pi}{\nu\nu_1}\right). \end{array}\right.$$

La somme des entiers (λ, μ, ν) devant être zéro, ces nombres sont, ou tous trois pairs, ou un seul pair et les deux autres impairs. L'expression précédente s'évanouit dans le premier cas, et ne subsiste que dans le second. De là résulte que, lors de l'état initial constant, la série (40), déjà limitée aux valeurs impaires de l'entier i, se réduit en outre aux termes dans lesquels un seul des nombres (λ, μ, ν) est pair. On peut adopter (μ, ν) impairs, et λ pair; la parenthèse de (60) est alors

$$\frac{2(\mu\mu_1 + \nu\nu_1)}{\mu\mu_1\nu\nu_1}, \quad \text{ou} \quad -\frac{2\lambda\lambda_1}{\mu\mu_1\nu\nu_1},$$

d'après l'identité (59), et M_1 est définitivement

$$M_1 = \frac{32}{\pi^3}\cdot\frac{\lambda\lambda_1}{\mu\mu_1\cdot\nu\nu_1}\cdot\frac{1}{2j+1}.$$

Ainsi, lors du refroidissement par communication du prisme triangulaire hémirégulier, primitivement à la température 1, la fonction V est la série triple

$$(61)\quad V = \frac{32}{\pi^3}\sum \frac{\lambda\lambda_1 u_1}{\mu\mu_1\nu\nu_1}\cdot\frac{\sin(2j+1)\pi\frac{z}{h}}{2j+1}\, e^{-\left[\theta^2+\left(\frac{2j+1.\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}}$$

ou le produit de la série simple V_z (57) par la série double

$$\frac{8}{\pi^2}\sum \frac{\lambda\lambda u_1}{\mu\mu_1\nu\nu_1} e^{-\theta^2\frac{t}{k}}$$

laquelle doit se réduire à l'unité, comme V_z, lorsque $t = 0$. D'où ce théorème d'analyse, que la série trigonométrique

$$(62)\qquad \sum \frac{\lambda\lambda_1 u_1}{\mu\mu_1\nu\nu_1}$$

est invariablement $\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$ à l'intérieur du triangle hémi-

régulier, tandis qu'elle est essentiellement zéro sur son périmètre.

On peut exprimer le terme simple des séries précédentes par les deux seuls nombres impairs (μ, ν), en éliminant les autres entiers à l'aide des relations (18) et (27), qui donnent

$$\lambda = -(\mu+\nu), \quad \lambda_1 = \mu - \nu, \quad \mu_1 = 2\nu + \mu, \quad \nu_1 = -(2\mu + \nu);$$

d'où résultent, pour la constante θ^2 (19), et la fraction facteur

$$\theta^2 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2(\mu^2+\mu\nu+\nu^2), \quad \frac{\lambda\lambda_1}{\mu\mu_1\nu\nu_1} = \frac{\mu^2-\nu^2}{\mu\nu(2\mu+\nu)(2\nu+\mu)}.$$

Mais cette élimination de λ et λ_1 détruit la symétrie des arcs (21) et (35), et complique la fonction u_1.

§ CI.

CAS DES FACES LATÉRALES IMPERMÉABLES.

A l'aide d'une modification générale et très-simple, la série V (25) exprime le refroidissement du prisme triangulaire régulier dans un nouveau cas, celui où ses deux bases étant toujours entretenues à la température zéro, ses autres faces restent imperméables à la chaleur. Il suffit, pour cela, de remplacer, dans u_1, u_2, (22), et W (24), les cosinus par les sinus des mêmes arcs, et réciproquement, c'est-à-dire de prendre

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \left\{\begin{aligned} &s_1 - s'_1 \\ &+ s_2 - s'_2 \\ &+ s_3 - s'_3, \end{aligned}\right. \qquad u_2 = \left\{\begin{aligned} &c_1 + c'_1 \\ &+ c_2 + c'_2 \\ &+ c_3 + c'_3, \end{aligned}\right. \\ \mathrm{W} &= \cos\frac{2\lambda\pi}{3r}p + \cos\frac{2\lambda\pi}{3r}p' + \cos\frac{2\lambda\pi}{3r}p''. \end{aligned}\right.$$

Par ce changement, le facteur W devient constant, et non nul, quand λ est zéro; ce qui introduit dans la série

double (25) des termes ne variant qu'avec (z, t), et qu'il convient de réunir dans une série simple, sous la forme

$$(64) \qquad \sum \mathfrak{N} \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left(\frac{i\pi}{h}\right)^2 \frac{t}{k}}.$$

La fonction V (25) comprend alors trois parties : la série triple ne s'étend qu'aux entiers (λ, μ, ν) inégaux, par suite du départ de la série double; et la série double ne s'étend qu'aux valeurs de λ qui ne sont pas nulles, par suite du départ de la série simple (64).

Il s'agit de vérifier que la fonction V (25), ainsi modifiée et complétée, exprime que les faces latérales du prisme triangulaire régulier ne sont traversées par aucun flux. Or le facteur variable du flux qui traverse un élément parallèle à l'axe du prisme a la forme.

$$\left(\frac{dV}{dx}\cos a + \frac{dV}{dy}\sin a\right);$$

expression différentielle qui est évidemment zéro, quel que soit a, pour tous les termes de la série simple (64), où (x, y) n'entrent pas. Il suffira donc de constater que cette même expression différentielle est nulle pour chacun des facteurs (63), quand, a étant α, α' ou α'' (10), la coordonnée P, P' ou P''' est égale à r; c'est-à-dire quand l'élément est situé sur une des faces latérales du prisme.

§ CII.

PROPRIÉTÉS DES NOUVEAUX FACTEURS.

Les arcs (21) restant les mêmes, les valeurs (11) donnent

$$\frac{ds_1}{dx} = \frac{2\pi}{9r}(\lambda\cos\alpha + \mu\cos\alpha' + \nu\cos\alpha'')c_1,$$
$$\frac{ds_1}{dy} = \frac{2\pi}{9r}(\lambda\sin\alpha + \mu\sin\alpha' + \nu\sin\alpha'')c_1,$$

et les cosinus des angles $(\alpha' - \alpha)$, $(\alpha - \alpha'')$, $(\alpha'' - \alpha')$. étant tous $\left(-\frac{1}{2}\right)$, d'après les équations (10), la relation (18) conduit au groupe

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds_1}{dx}\cos\alpha + \frac{ds_1}{dy}\sin\alpha &= \frac{\lambda\pi}{3r}c_1, \\ \frac{ds_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{ds_1}{dy}\sin\alpha' &= \frac{\mu\pi}{3r}c_1, \\ \frac{ds_1}{dx}\cos\alpha'' + \frac{ds_1}{dy}\sin\alpha'' &= \frac{\nu\pi}{3r}c_1. \end{aligned} \right.$$

On obtient le groupe homologue, avec les dérivées de c_1 au lieu de s_1 en substituant $-s_1$ à c_1 dans les seconds membres. Répétant les mêmes opérations sur tous les sinus et cosinus de u_1 et u_2 (63), on a d'abord, en partant de la première (65) et de son homologue,

$$\frac{du_1}{dx}\cos\alpha + \frac{du_1}{dy}\sin\alpha = \frac{\pi}{3r}[\lambda(c_1 - c'_3) + \mu(c_2 - c'_2) + \nu(c_3 - c'_1)],$$

$$\frac{du_2}{dx}\cos\alpha + \frac{du_2}{dy}\sin\alpha = -\frac{\pi}{3r}[\lambda(s_1 + s'_3) + \mu(s_2 + s'_2) + \nu(s_3 + s'_1)].$$

Or, d'après le § XC, les différences de cosinus dans la première expression, les sommes des sinus dans la seconde, ont les facteurs respectifs

$$\sin\frac{\lambda\pi}{3r}(P + 2r), \quad \sin\frac{\mu\pi}{3r}(P + 2r), \quad \sin\frac{\nu\pi}{3r}(P + 2r),$$

les deux expressions s'annulent donc quand $P = r$, puisque (λ, μ, ν) sont des entiers.

On a ensuite, en partant de la seconde (65) et de son homologue,

$$\frac{du_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{du_1}{dy}\sin\alpha' = \frac{\pi}{3r}[\lambda(c_3 - c'_2) + \mu(c_1 - c'_1) + \nu(c_2 - c'_3)],$$

$$\frac{du_2}{dx}\cos\alpha' + \frac{du_2}{dy}\sin\alpha' = -\frac{\pi}{3r}[\lambda(s_3 + s'_2) + \mu(s_1 + s'_1) + \nu(s_2 + s'_3)].$$

Or ici les nouvelles différences de cosinus, les nouvelles

sommes de sinus ont respectivement les facteurs

$$\sin\frac{\lambda\pi}{3r}(\mathrm{P}'-r),\quad \sin\frac{\mu\pi}{3r}(\mathrm{P}'-r),\quad \sin\frac{\nu\pi}{3r}(\mathrm{P}'-r);$$

ces nouvelles expressions s'annulent donc quand $\mathrm{P}'=r$. On constate aussi, en partant de la troisième (65) et de son homologue, que les binômes

$$\left(\frac{du_1}{dx}\cos\alpha''+\frac{du_1}{dy}\sin\alpha''\right),\quad \left(\frac{du_2}{dx}\cos\alpha''+\frac{du_2}{dy}\sin\alpha''\right),$$

s'évanouissent de la même manière quand $\mathrm{P}''=r$.

Le facteur W (63) satisfait aux mêmes conditions, car il suit des relations (23) et (11) que ses dérivées sont

$$\frac{2\lambda\pi}{3r}\left(\cos\alpha\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p+\cos\alpha'\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p'+\cos\alpha''\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p''\right),$$
$$\frac{2\lambda\pi}{3r}\left(\sin\alpha\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p+\sin\alpha'\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p'+\sin\alpha''\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p''\right);$$

ajoutées avec les facteurs respectifs ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$), elles donnent, par les valeurs (10), la somme

$$\frac{2\lambda\pi}{3r}\left[\sin\frac{2\lambda\pi}{3r}p-\sin\frac{\lambda\pi}{3r}(3r-p)\cos\frac{\lambda\pi}{3r}(p'-p'')\right],$$

$(p'+p'')$ étant égal à $(3r-p)$ d'après la relation (26). Or la dernière parenthèse s'annule quand $p=0$, ou $\mathrm{P}=r$. On constate pareillement que les binômes

$$\left(\frac{d\mathrm{W}}{dx}\cos\alpha'+\frac{d\mathrm{W}}{dy}\sin\alpha'\right),\quad \left(\frac{d\mathrm{W}}{dx}\cos\alpha''+\frac{d\mathrm{W}}{dy}\sin\alpha''\right)$$

s'évanouissent, le premier quand $p'=0$, ou $\mathrm{P}'=r$, le second quand $p''=0$, ou $\mathrm{P}''=r$.

§ CIII.

VALEURS DES COEFFICIENTS.

Ainsi, la fonction V (25), formée avec les facteurs (63), et complétée par la série (64), vérifie toutes les conditions

à la surface du cas actuel, lesquelles sont évidemment comprises dans le groupe général (2), § LVII. Le théorème fondamental (14), § LVIII, est donc applicable, c'est-à-dire que

$$(66) \qquad \int_{\varpi} UU'\,d\varpi = 0$$

quand U et U' sont les facteurs variables de l'exponentielle dans des termes différents. Actuellement les facteurs (U, U') sont de la forme $u \sin i\pi \frac{z}{h}$, $u' \sin i'\pi \frac{z}{h}$, et, d'après le § XCI, le signe des intégrations est

$$\int_{\varpi} d\varpi \ldots = \int_0^h dz \int_{\sigma} d\sigma \ldots ;$$

si donc, i' étant égal à i, u' diffère de u, le théorème (66) donne

$$(67) \qquad \int_{\sigma} uu'\,d\sigma = 0.$$

Là u' est constant s'il appartient à l'un des termes de la série simple (64), et l'on peut prendre pour u l'une des fonctions (63). On a donc nécessairement, d'après (67),

$$(68) \qquad \int_{\sigma} u_1\,d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} u_2\,d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} W\,d\sigma = 0,$$

équations que l'on vérifie, en appliquant aux fonctions (63) les calculs indiqués au § XCII.

La première équation (68) est d'ailleurs identique, car, en passant des valeurs (22) à celles (63), les facteurs u_1 et u_2 ont conservé leur symétrie inverse et directe par rapport au plan $P'' = P'$. En effet, par le changement de P' en P'' et de P'' en P', les arcs (21) (A_1, A_2, A_3) devenant (A'_3, A'_2, A'_1) et réciproquement, u_2 (63) reste toujours le même, tandis que u_1 change de signe en conservant la même valeur absolue. Autrement : si l'on remplace, dans les équations (29),

les premiers facteurs, qui sont tous des sinus, par les cosinus correspondants, on passe des valeurs (22) à celle (63), et cela sans changer les seconds facteurs, dont dépend la symétrie inverse pour u_1, directe pour u_2.

D'après cela, le théorème particulier du § XCI ayant encore lieu, les coefficients (M_1, M_2, N) seront déterminés par les mêmes formules que lors du refroidissement par communication; et le coefficient $\mathfrak{N}$ de la série simple (64) sera, d'après (30), § XCI,

$$(69) \qquad \mathfrak{N} = \frac{2}{h} \frac{\int_0^h dz \int_\sigma d\sigma . \mathrm{f} \sin i\pi \frac{z}{h}}{\int_\sigma d\sigma},$$

l'intégrale du dénominateur n'étant autre que l'aire du triangle équilatéral.

Lorsque l'état initial f ne dépend que de z, c'est-à-dire lorsque tous les points d'une même section parallèle aux bases ont la même température primitive, les coefficients (M_1, M_2, N) sont nuls, d'après les identités (68), et $\mathfrak{N}$ (69) devient

$$\mathfrak{N} = \frac{2}{h} \int_0^h \mathrm{f} \sin i\pi \frac{z}{h} dz.$$

La fonction V se réduit donc à la série simple (64). Elle est alors identique avec une série V_z (25), § LXII, qui exprime le refroidissement d'un mur ou d'une couche solide, comprise entre deux plans ($z = 0$, $z = h$), parallèles et indéfinis, entretenus dans toute leur étendue à la température zéro, lorsque l'état initial est une fonction f de z seul. Ce qui devait être, puisque, dans ces circonstances, tous les plans perpendiculaires aux faces du mur ne sont traversés par aucun flux, et peuvent, en restant imperméables, servir de faces latérales à un prisme quelconque, sans que l'état calorifique du volume limité soit en rien changé.

ONZIÈME LEÇON.

PRISME HEXAGONAL RÉGULIER.

Caractère distinctif du triangulaire régulier. — Séries applicables au prisme hexagonal. — Cas de son refroidissement par communication. — Cas des faces latérales imperméables. — Réseaux triangulaires. — Polyèdres composés.

---

§ CIV.

SÉRIES MULTIPLES COMPARÉES.

Lorsqu'il s'agit des corps solides homogènes et non cristallins, les polyèdres traités dans les leçons précédentes, sont les seuls dont le refroidissement par communication puisse s'exprimer à l'aide d'une fonction V trigonométrique et périodique, quelles que soient les températures primitives. Un d'entre eux se distingue par une propriété caractéristique : pour tous, quand l'état initial est constant, la température V est donnée par une série multiple, dont tous les coefficients sont numériquement évaluables; or, le prisme triangulaire régulier est le seul pour lequel cette série multiple n'est que double. Elle est triple pour tous les autres. Indécomposable quand il s'agit des tétraèdres $\frac{1}{6}$, et $\frac{1}{24}$, [(27), § LXXX, et (36), § LXXXIII], elle est le produit, d'une série simple V_u, [(27), § LXIII], par une série double indécomposable pour les prismes triangulaires

$\frac{1}{2}$, et hémirégulier, [(29), § LXXII, et (61), § C], de trois séries simples V_u pour le prisme rectangle, celui à base carrée, et le cube.

Quant à la série double du prisme triangulaire régulier, elle est le produit, d'une série simple V_u, par une série V_Δ [(57), § XCIX], simple aussi, mais de nature essentiellement différente : car, de ces deux séries, formées l'une et l'autre avec des sinus, la première emploie exclusivement les nombres impairs $(2j+1)$, et la seconde les nombres pairs (2λ). D'ailleurs, quand $t=0$, si la série V_u devient *l'unité* pour tous les points d'une ligne droite, et *zéro* à ses extrémités, la série V_Δ devient *l'unité* pour tous les points d'une surface, celle du triangle équilatéral, et *zéro* sur le périmètre de ce triangle ; la seconde série a donc une tout autre portée que la première. Ces propriétés analytiques du prisme triangulaire régulier méritaient d'être signalées. Et l'on remarquera qu'il eût été difficile, sinon impossible, de les apercevoir avec un autre système de coordonnées que celui des (P, P', P''), dont la symétrie est en quelque sorte calquée sur celle du prisme.

Il existe d'autres polyèdres, dont le refroidissement par communication s'exprime encore par des fonctions trigonométriques et périodiques, mais seulement quand l'état initial, d'accord avec leur symétrie géométrique, apporte les symétries calorifiques inverses qu'exige la loi générale du paragraphe LXXXIV. L'exemple qui va suivre indique nettement le moyen de reconnaître tous ces nouveaux polyèdres.

§ CV.

PRISME HEXAGONAL RÉGULIER.

Le prisme hexagonal régulier satisfait à la principale des conditions définies au paragraphe LXXXV, car on peut

paver tout l'espace avec des prismes de la même forme et symétriquement placés. Il semble, d'après cela, que la loi de son refroidissement par communication puisse s'exprimer généralement, ou pour tout état initial, par une série trigonométrique et périodique. Mais, pour qu'il en soit ainsi, une condition essentielle lui manque. Le plan de chacune de ses faces latérales, indéfiniment prolongé, ne contient pas seulement des faces limitant les autres prismes, comme cela a lieu pour les polyèdres précédemment traités : il contient aussi, et alternativement, des sections diamétrales.

La série doit donc exprimer que le plan d'une face latérale ne conserve la température zéro, que sur des bandes de même largeur, séparées par d'autres bandes d'une largeur double, où la température peut être variable et quelconque. Or, la traduction analytique de ce genre de discontinuité, exige l'introduction de termes, où les variables entrent sous des intégrales définies. Et ces termes, d'une nature que nous ne considérerons pas, ne peuvent disparaître de la série totale, qu'avec la discontinuité elle-même.

Le refroidissement du prisme hexagonal régulier, ne peut donc s'exprimer, particulièrement, par une série trigonométrique et périodique, que si ses faces latérales et ses plans diamétraux satisfont à des conditions identiques. Si les faces sont entretenues à la température zéro, il faut que l'état initial apporte une symétrie calorifique inverse par rapport à chacun des trois plans diamétraux, afin qu'ils conservent aussi la température zéro. Si, au contraire, l'état initial apporte une symétrie calorifique directe par rapport aux trois plans diamétraux, ces plans n'étant alors traversés par aucun flux, il faut qu'il en soit de même des faces latérales, c'est-à-dire qu'elles soient imperméables à la chaleur.

Dans l'un ou l'autre cas, les températures initiales ou variables de l'un des six prismes triangulaires réguliers, dé-

coupés par les plans diamétraux, assigneront celles des cinq autres. Donc, pour résoudre ces deux cas particuliers, il suffit de savoir traiter généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement du prisme triangulaire régulier, lorsque ses faces latérales sont entretenues à zéro s'il s'agit du premier cas, lorsqu'elles sont imperméables s'il s'agit du second. Et ces deux problèmes ont été résolus dans les leçons précédentes.

Jusqu'à présent des séries particulières, pour le prisme à base carrée, le cube, ou le prisme triangulaire régulier, sont devenues des séries générales pour d'autres corps. Maintenant l'inverse a lieu : les séries générales du prisme triangulaire régulier, donnent des séries particulières pour le prisme hexagonal. C'est une seconde route, en quelque sorte ascendante, qui peut conduire à de nouveaux polyèdres, et qu'il importe d'explorer. Dans ce but, il est nécessaire de bien établir le premier exemple rencontré, en ramenant à leurs expressions analytiques les plus simples, les deux solutions particulières qui viennent d'être définies.

§ CVI.

FORMATION DES SÉRIES PARTICULIÈRES.

Si, dans la série totale et générale (54) du § XCVIII, on supprime la première des trois séries partielles, celle aux facteurs (u_1, u'_1, u''_1) ; si, en outre, on ne conserve des deux autres que les termes où les entiers (λ, μ, ν) des (ν_1, ν_2), λ de W, sont divisibles par 3, et peuvent être remplacées par les multiples $(3l, 3m, 3n)$, la fonction V devient

$$(1)\ V = \left\{ \begin{array}{l} \sum\!\!\sum\!\!\sum (\mathfrak{M}_1 \nu_1 + \mathfrak{M}_2 \nu_2) \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\tau^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \\ + \sum\!\!\sum \mathrm{NW} \sin i\pi \frac{z}{h} \cdot e^{-\left[\left(\frac{2l\pi}{r}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{h}\right)^2\right]\frac{t}{k}} \end{array} \right.$$

Les trois coordonnées (P, P', P'') vérifiant toujours la relation

$$(2) \qquad P + P' + P'' = 0,$$

le facteur W peut être pris sous la nouvelle forme

$$(3) \qquad W = \sin 2l\pi \frac{P}{r} + \sin 2l\pi \frac{P'}{r} + \sin 2l\pi \frac{P''}{r}.$$

Dans les facteurs (ν_1, ν_2) conservés (pour lesquels le résidu δ, du § XCVI, est *zéro*, ceux aux résidus, $\delta = +1$, $\delta = +2$, étant supprimés), les nouveaux nombres entiers (l, m, n), qui sont inégaux, et dont un au moins est négatif, satisfont à l'équation

$$(4) \qquad l + m + n = 0.$$

Les arcs polynômes (21), du paragraphe LXXXVIII, ont actuellement les valeurs

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\pi}{3r}(l\,P + m\,P' + n\,P'') = A_1, \\ &\frac{2\pi}{3r}(m\,P + n\,P' + l\,P'') = A_2, \\ &\frac{2\pi}{3r}(n\,P + l\,P' + m\,P'') = A_3, \\ &\frac{2\pi}{3r}(n\,P + m\,P' + l\,P'') = A'_1, \\ &\frac{2\pi}{3r}(m\,P + l\,P' + n\,P'') = A'_2, \\ &\frac{2\pi}{3r}(l\,P + n\,P' + m\,P'') = A'_3, \end{aligned} \right.$$

en supprimant les multiples additionnels de 2π (c'est-à-dire les $2j\pi$ du § XCVI); et les lettres c et s, affectées des mêmes indices et accents que la lettre A, dési-

gnant les cosinus et sinus de ces arcs, on a

$$(6)\qquad \nu_1 = \left\{\begin{array}{c} c_1 - c'_1 \\ + c_2 - c'_2 \\ + c_3 - c'_3 \end{array}\right\}, \qquad \nu_2 = \left\{\begin{array}{c} s_1 + s'_1 \\ + s_2 + s'_2 \\ + s_3 + s'_3 \end{array}\right\}.$$

Enfin, la constante τ^2, de la première exponentielle (1), est

$$(7)\qquad \tau^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{r}\right)^2 (l^2 + m^2 + n^2),$$

en substituant respectivement les multiples $(3l, 3m, 3n)$ aux entiers (λ, μ, ν) de θ^2 (19), § LXXXVIII.

La série (1), ainsi composée, n'exprime le refroidissement du prisme triangulaire régulier, dont les faces latérales ont pour équations

$$(8)\qquad P = r, \quad P' = r, \quad P'' = r,$$

que lors d'un état initial particulier qu'il s'agit de définir. Les six arcs (5) formant trois couples, dans chacun desquels la coordonnée P a le même coefficient, les demi-sommes des arcs de chaque couple deviennent, à l'aide des relations (2) et (4),

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{A_1 + A'_3}{2} = l\pi\dfrac{P}{r}, \\ \dfrac{A_2 + A'_2}{2} = m\pi\dfrac{P}{r}, \\ \dfrac{A_3 + A'_1}{2} = n\pi\dfrac{P}{r}. \end{array}\right.$$

Les trois différences de cosinus, $(c_1 - c'_3)$, $(c_2 - c'_2)$, $(c_3 - c'_1)$, dans ν_1 (6), les trois sommes de sinus, $(s_1 + s'_3)$, $(s_2 + s'_2)$, $(s_3 + s'_1)$, dans ν_2, ont respectivement pour facteurs les sinus des arcs (9), ou

$$\sin l\pi\frac{P}{r}, \quad \sin m\pi\frac{P}{r}, \quad \sin n\pi\frac{P}{r},$$

lesquels deviennent zéro, puisque (l, m, n) sont des nombres entiers, quand

$$(10) \qquad P = r, \quad P = 0, \quad P = -r.$$

Les facteurs, ν_1, ν_2, sont donc nuls sur les trois plans parallèles représentés par les équations (10). On constate, de la même manière, en groupant les arcs (5) par les coefficients de P′, de P″, que les facteurs, ν_1 et ν_2, sont nuls sur les plans représentés par les équations

$$(11) \qquad \begin{cases} P' = r, \quad P' = 0, \quad P' = -r, \\ P'' = r, \quad P'' = 0, \quad P'' = -r. \end{cases}$$

Quant à W (3), rappelant la formule de trigonométrie élémentaire

$$\sin a + \sin b + \sin c =$$

$$4 \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \sin \frac{a+b}{2} + \sin(a+b+c),$$

dont la vérification est d'ailleurs facile, et ayant égard à la relation (2), on met ce facteur sous la forme

$$W = -4 \sin l\pi \frac{P}{r} \sin m\pi \frac{P}{r} \sin n\pi \frac{P}{r},$$

et l'on voit qu'il s'annule, comme ν_1 et ν_2, sur les neuf plans (10) et (11).

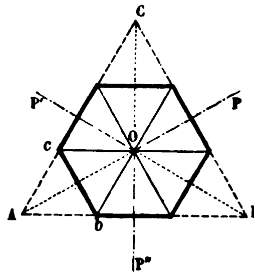
§ CVII.

CAS DES FACES LATÉRALES A ZÉRO.

Ainsi, lorsque la série V (1) exprime le refroidissement du prisme triangulaire régulier, la température est fixée à zéro, non-seulement sur les faces latérales (8), mais en outre sur les plans, parallèles deux à deux à ces faces, et

qui divisent chacune des hauteurs de la base équilatérale, en trois parties égales. Ces six nouveaux plans à zéro, découpent le polyèdre en neuf prismes triangulaires réguliers égaux; et si l'on retranche les trois extrêmes, les six qui restent forment, autour du centre O, le prisme hexagonal ré-

Fig. 12.



gulier, dont les six faces latérales ont pour équations

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} & P = r, \\ P = -r, & \text{ou}\quad P' + P'' = r; \\ & P' = r, \\ P' = -r, & \text{ou}\quad P'' + P = r; \\ & P'' = r, \\ P'' = -r, & \text{ou}\quad P + P' = r. \end{array}\right.$$

La série (1) donne donc la loi du refroidissement du prisme hexagonal régulier, lorsque, ses six faces latérales (12) ainsi que ses deux bases ($z = 0$, $z = h$) étant entretenues à la température zéro, la température reste aussi fixée à zéro sur les plans diamétraux

$$(13)\qquad P = 0,\quad P' = 0,\quad P'' = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle exprime le refroidissement par communication de ce prisme, quand la symétrie calorifique inverse

existe, à toute époque et conséquemment à l'origine, par rapport aux trois plans (13).

L'état initial, f, de l'un des six prismes triangulaires composants, assigne alors celui des cinq autres, et les coefficients ($\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, N) peuvent se déterminer, comme s'il s'agissait du seul prisme composant (Obc), dont les faces latérales sont

$$(14)\qquad P' = 0,\quad P'' = 0,\quad P' + P'' = r.$$

Prenant pour l'élément de surface $d\sigma$ le parallélogramme infinitésimal

$$d\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dP'\, dP'',$$

la double intégration faite sur la base σ, ou sur le triangle aux côtés (14), a pour limites

$$\int_\sigma d\sigma \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^r dP' \int_0^{r-P'} dP'' \ldots,$$

et, d'après la formule (30), § XCI, $\mathfrak{M}$ étant successivement ($\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, N) quand $\mathfrak{V}$ est respectivement (ν_1, ν_2, $2W$), on obtient l'expression générale

$$(15)\qquad \mathfrak{M} = \frac{4}{3 r^2 h} \int_0^h dz \int_0^r dP' \int_0^{r-P'} dP''\, f\, \mathfrak{V} \sin i\pi \frac{z}{h},$$

en substituant à l'intégrale constante

$$\int_\sigma d\sigma . \mathfrak{V}^2,$$

facteur du dénominateur primitif, la neuvième partie de la valeur trouvée pour le prisme triangulaire total.

Quand il s'agit d'effectuer les intégrations indiquées par la formule (15), il faut exprimer les ($\mathfrak{V}$, f) à l'aide du

couple de coordonnées (P', P''), en substituant $-(P'+P'')$ à P. Par cette substitution, et en introduisant, pour simplifier, les différences

$$(16) \qquad m-n=l_1, \quad n-l=m_1, \quad l-m=n_1,$$

les arcs (5) s'écrivent sous la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{2\pi}{3r}(m_1 P'' - n_1 P'), \\ A_2 &= \frac{2\pi}{3r}(n_1 P'' - l_1 P'), \\ A_3 &= \frac{2\pi}{3r}(l_1 P'' - m_1 P'); \\ A'_1 &= \frac{2\pi}{3r}(l_1 P' - m_1 P''), \\ A'_2 &= \frac{2\pi}{3r}(n_1 P' - l_1 P''), \\ A'_3 &= \frac{2\pi}{3r}(m_1 P' - n_1 P''). \end{aligned} \right.$$

§ CVIII.

PLANS NORMAUX ET DIAGONAUX.

Dans le prisme hexagonal régulier, outre les faces latérales (12), et les plans diamétraux (13), il y a lieu de considérer les trois plans, normaux et bissecteurs,

$$(18) \qquad P''=P', \quad P=P'', \quad P'=P.$$

Si l'état initial, f, du prisme composant aux faces (14), apporte une symétrie calorifique directe ou inverse, par rapport au premier plan (18), la discussion de l'intégrale (15) montre que les coefficients $(\mathfrak{M}_2, N)$ existent seuls, ou disparaissent. Ainsi, quand la série (1) exprime

le refroidissement par communication du prime hexagonal régulier, si les termes aux facteurs ν_1 existent seuls, c'est que l'état initial a introduit une symétrie calorifique inverse par rapport aux six plans (13) et (18) ; et si, au contraire, ces termes ont disparu, c'est que l'état initial a introduit une symétrie calorifique, inverse par rapport aux plans (13), directe par rapport aux plans (18).

(Pour compléter la représentation, par les coordonnées (P, P′, P″), des diverses lignes tracées sur l'hexagone régulier, il faut ajouter, aux côtés (12), aux diamètres (13), et aux normales bissectrices (18), les six diagonales non diamétrales, dont les équations sont

$$(19)\quad \begin{cases} P' - P'' = r, \\ P'' - P = r, \\ P - P' = r, \end{cases} \qquad (19')\quad \begin{cases} P' - P = r, \\ P - P'' = r, \\ P'' - P' = r, \end{cases}$$

et qui composent deux groupes, inscrivant chacun un triangle équilatéral.)

§ CIX.

CAS DES FACES LATÉRALES IMPERMÉABLES.

D'après le § CI, la série (1) exprime le refroidissement du prisme hexagonal, dans le second cas défini au § CV, si, toutes choses égales d'ailleurs, on prend pour composer les facteurs trigonométriques (ν_1, ν_2, W) les sinus au lieu des cosinus, et réciproquement, c'est-à-dire, si l'on pose

$$(20)\quad \begin{cases} \nu_1 = \begin{cases} s_1 - s'_1 \\ + s_2 - s'_2 \\ + s_3 - s'_3, \end{cases} \qquad \nu_2 = \begin{cases} c_1 + c'_1 \\ + c_2 + c'_2 \\ + c_3 + c'_3; \end{cases} \\ W = \cos 2l\pi\dfrac{P}{r} + \cos 2l\pi\dfrac{P'}{r} + \cos 2l\pi\dfrac{P''}{r}; \end{cases}$$

au lieu des (6) et (3). Et si, en outre, on détache de la série double, les termes où l'entier l est zéro, pour les réunir dans une série simple additionnelle

$$(21) \qquad \sum \mathfrak{N} \sin i\pi \frac{z}{h} . e^{-\left(\frac{i\pi}{h}\right)^2 \frac{t}{k}}.$$

En effet, $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ étant les angles que les plans normaux (18) font avec un même axe fixe parallèle aux bases, si l'on répète ici les mêmes calculs qu'au § CII, on constate que, pour tous les nouveaux facteurs (20), désignés collectivement par u, l'expression différentielle

$$\left(\frac{du}{dx}\cos a + \frac{du}{dy}\sin a\right),$$

où a est successivement pris égal à $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, s'annule respectivement sur les plans des trois groupes (10) et (11).

Ainsi, quand elle est composée avec les facteurs (20), et complétée par la série (21), la fonction V (1) donne la loi du refroidissement du prisme hexagonal, lorsque, ses bases étant entretenues à zéro, ses faces latérales (12) et ses plans diamétraux (13) ne sont traversés par aucun flux. Ce qui exige que les faces (12) soient imperméables, et que la symétrie calorifique directe existe par rapport aux plans (13). L'état initial, f, du prisme composant aux faces (14), assigne encore celui des cinq autres. Le théorème général du § LVIII étant toujours applicable, les coefficients ($\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, N) sont encore déterminés par la formule (15), en y substituant respectivement à $\mathfrak{V}$, les facteurs (20) (ν_1, ν_2, $2W$); formule qui donne aussi $\mathfrak{N}$, (21), en remplaçant $\mathfrak{V}$ par le nombre constant 6. Si f introduit, en outre, une symétrie calorifique directe, ou inverse, par rapport au premier plan (18), les coefficients ($\mathfrak{M}_2$, N, $\mathfrak{N}$) resteront seuls ou disparaîtront. Dans le premier cas, les plans nor-

maux (18), du prisme hexagonal, ne seront traversés par aucun flux, dans le second leur température restera fixée à zéro.

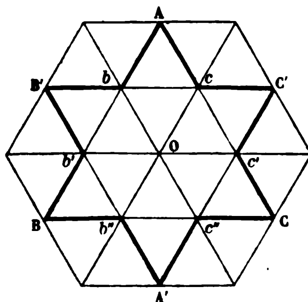
Les deux solutions qui précèdent ne sont que particulières, puisqu'elles exigent que les températures primitives du prisme hexagonal se reproduisent, soit avec les mêmes signes, soit avec des signes contraires, dans les six prismes triangulaires composants; de telle sorte que ces symétries calorifiques soient d'accord avec la symétrie géométrique du polyèdre. Or, il y a lieu de penser que de telles solutions restrictives sont réellement plus importantes pour les applications, que celles qui embrassent tous les cas. Car, si la grande complication de ces dernières solutions disparaît pour les premières, n'est-ce pas une preuve que celles-ci sont plus naturelles?

§ CX.

RÉSEAU DU TRIANGULAIRE RÉGULIER.

La série qui exprime généralement le refroidissement par communication du prisme triangulaire régulier, étant étendue à tout l'espace, donne quatre suites de plans, parallèles et équidistants, dont la température reste à zéro. L'une des

Fig. 13.



quatre suites forme des couches d'épaisseur h; les trois autres, perpendiculaires à toute face de ces couches, y tracent un réseau de triangles équilatéraux, égaux et symétriquement placés.

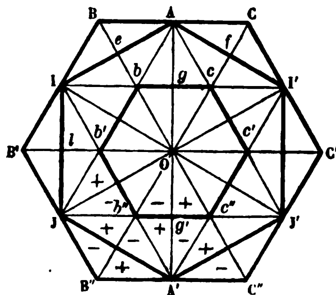
Tout polygone, formé avec un certain nombre de ces triangles, donne évidemment la base d'un prisme droit, de hauteur h, dont le refroidissement par communication est exprimable particulièrement par la même série, lorsque l'état initial apporte une symétrie calorifique inverse par rapport aux plans qui découpent ce prisme. On trouve ainsi : des prismes triangulaires réguliers de toutes grandeurs (Abc, $Ab'c'$, ABC); le prisme hexagonal du § CVII, ($bb'b''c''c'c$) et celui qui limite la figure; le prisme droit ayant pour base le losange $AbOc$, dont le côté est égal à l'une des diagonales, seule à zéro; des prismes, à base trapèze ($bcb'c'$, bcBC), à base pentagone ($Ab'b''c''c'$), enfin à base étoilée (AB'BA'CC').

§ CXI.

RÉSEAU DE L'HÉMIRÉGULIER.

La série générale du prisme triangulaire hémirégulier,

Fig. 14.



donne le réseau plus compliqué, mais plus fécond, de la figure ci-jointe.

Si l'on définit un premier triangle à l'aide du signe +, celui qui le touche par un côté commun à l'aide du signe —, un troisième qui touche le second à l'aide du signe +, et ainsi de suite, on vérifie que la loi générale, du § LXXXIV, est reproduite par rapport à chaque ligne tracée. Car, tout côté que contient cette ligne sépare deux triangles symétriquement placés, dont l'un a le signe +, l'autre le signe —; ce qui montre que leurs températures sont symétriquement égales et de signes contraires, comme pour les deux triangles de départ.

Ce second réseau indique les polyèdres, pour lesquels la série de l'hémirégulier peut être particulière, et que l'on peut désigner par leurs bases. On trouve là : deux prismes triangulaires réguliers, l'un IJO avec ses trois plans bissecteurs à zéro, l'autre A*bc* avec un seul; le prisme à base losange A*b*O*c*, déjà défini, avec ses deux plans diagonaux à zéro; le prisme hexagonal du § CVII, avec la symétrie calorifique inverse par rapport aux trois plans normaux et bissecteurs, ($bb'b''c''c'c$); le même prisme hexagonal différemment découpé (IB'Jb''Ob); deux autres prismes hexagonaux plus grands, dont l'un AIJA'J'I' est inscrit, et l'autre BB'B''C''C'C circonscrit à un même cylindre; des prismes pentagonaux irréguliers, A*ebcf*, A*c*O*l*I, AI$b''c''$I', AI$b'c'$I'; un prisme à base quadrilatère A*ebg*; des prismes rectangles I*g*O*l*, IJJ'I'; même un prisme octogonal irrégulier AIB'JA'J'C'I'.

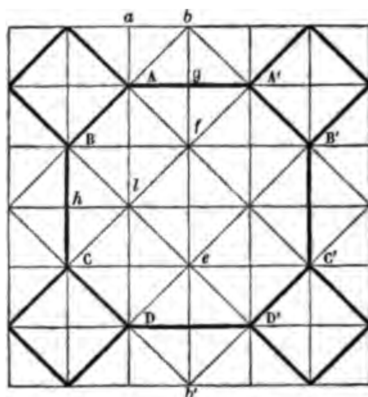
§ CXII.

RÉSEAU DU TRIANGULAIRE $\frac{1}{2}$.

La série générale du prisme triangulaire $\frac{1}{2}$, ou à base

rectangle isocèle, s'étend de la même manière à divers polyèdres, indiqués par le réseau suivant :

Fig. 15.



On y trouve : deux prismes à base carrée, l'un A *b* A'*f* avec deux plans diagonaux à zéro, l'autre A*abg* avec un seul; un prisme à base parallélogramme ABC*l*; des prismes hexagonaux irréguliers, AB*hlfg*, ABCD*ef*, *b*BC*b'*C'B'; enfin un prisme octogonal hémirégulier ABCDD'C'B'A', qui rappelle le carrelage composé d'octogones et de carrés, avec cette différence, que le côté commun à deux octogones est à celui du carré comme $\sqrt{2}$ est à 1, au lieu de lui être égal.

§ CXIII.

POLYÈDRES COMPOSÉS DE TÉTRAÈDRES $\frac{1}{24}$.

Il existe pareillement plusieurs polyèdres décomposables en tétraèdres $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{24}$, dont le refroidissement par communication s'exprime par la série générale appartenant à l'un des corps composants, quand les plans qui les découpent

restent à zéro. Outre le cube, on peut citer le groupe suivant : la pyramide régulière à base carrée, comprenant quatre tétraèdres $\frac{1}{24}$, et dont la hauteur est la moitié du côté de la base; l'octaèdre hémirégulier, composé avec deux pyramides égales à la précédente; enfin le dodécaèdre rhomboïdal, formé par six de ces mêmes pyramides superposées sur les faces du cube.

En résumé, tous les polyèdres cités constituent trois groupes distincts; chaque groupe étant défini par le polyèdre le plus simple, ou par un *élément* composant, toujours le même. L'élément du premier groupe est le prisme triangulaire hémirégulier, celui du second le prisme triangulaire $\frac{1}{2}$, celui du troisième le tétraèdre $\frac{1}{24}$. Nouvelle analogie avec la constitution intérieure des milieux cristallins. Et, si cette analogie n'est encore qu'imparfaitement indiquée, elle s'étendra dans les leçons suivantes, de manière à constituer une véritable identité.

Lorsque l'on connaît la loi intégrale du refroidissement d'un corps solide dont la surface est, ou à zéro, ou sans flux, on peut en déduire les lois de l'état vibratoire du même corps. En effet, il résulte du § LVII, que la solution du premier problème est résumée par le tableau

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz}+\theta^2U=0,$$

$$U_\sigma=0,\quad \text{ou}\quad \left(\frac{dU}{dx}\cos\xi+\frac{dU}{dy}\cos\eta+\frac{dU}{dz}\cos\zeta\right)_\sigma=0,$$

$$\sum U=f(x,y,z);$$

car, lorsqu'on a reconnu tous les groupes (U,θ^2), qui sa-

tisfont à ces conditions pour le corps proposé, la température V s'exprime ainsi :

$$V = \sum U e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}.$$

Or, les mêmes groupes donnent immédiatement la série

$$F = \sum U \cos\left(\theta \frac{t}{\omega}\right),$$

pour exprimer l'intégrale de l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} = \omega^2 \frac{d^2F}{dt^2};$$

et l'on a : par la fonction F elle-même, la loi de la dilatation, lors d'un état vibratoire tel que la surface du corps soit un ventre de vibration; ou, par les dérivées de cette fonction F, les projections du déplacement moléculaire, quand le corps vibre de telle sorte que les molécules de sa surface n'en sortent pas. D'après ce rapprochement, les leçons qui précèdent donnent les seules concamérations polyédriques, qui puissent vibrer à l'unisson, dans un milieu solide, homogène et non cristallin.

DOUZIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT DES POLYÈDRES CRISTALLINS. PRISMES OBLIQUES.

Refroidissement par communication des corps cristallins. — Parallélipipède obliquangle. — Prisme à deux arêtes primitives. — Ses prismes triangulaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. — Symétries obliques. — Prisme tangent suivant les arêtes primitives.

---

§ CXIV.

REFROIDISSEMENT DES CORPS CRISTALLINS.

D'après la loi de concordance établie au § XXVI, lorsqu'il s'agit d'un corps solide, homogène et cristallin, l'équation qui régit les températures variables a la forme générale

$$(1) \qquad A^2\frac{d^2V}{dx'^2} + B^2\frac{d^2V}{dy'^2} + C^2\frac{d^2V}{dz'^2} = k\frac{dV}{dt}.$$

Les axes sont obliques et parallèles à des diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal : (A, B, C) sont des longueurs proportionnelles à ces diamètres ; k est le produit du rapport $\frac{\Gamma\Delta}{q}$, (36), § XXI, par le carré r^2 d'une ligne, § XXXIII ; les quatre lignes (A, B, C, r) n'étant assujetties qu'à conserver les mêmes rapports, une quelconque d'entre elles peut être prise arbitrairement. Si le corps se refroidit dans un bain à zéro, l'équation à la surface

est simplement

(2) $$V_\sigma = 0.$$

La reproduction de l'état initial, quand $t = 0$, exige que

(3) $$V_0 = f(x', y', z').$$

Pour déterminer la fonction V qui, vérifiant l'équation (1), satisfera aux conditions (2) et (3), on la prend sous la forme

(4) $$V = \mathop{\mathrm{S}} MU e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

d'une somme de termes simples, qui, tous et séparément, vérifient l'équation générale (1), et celle à la surface (2). Chacun d'eux étant le produit d'un coefficient indéterminé M, par une fonction U de (x', y', z'), et par une exponentielle en t, dans laquelle θ^2 est constant, la double condition imposée exige que l'on ait

(5) $$\left\{\begin{array}{c} A^2 \dfrac{d^2U}{dx'^2} + B^2 \dfrac{d^2U}{dy'^2} + C^2 \dfrac{d^2U}{dz'^2} + \theta^2 U = 0, \\ U_\sigma = 0. \end{array}\right.$$

Lorsqu'on a reconnu tous les groupes (U, θ^2) qui vérifient les équations (5), pour le solide proposé, il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients M, de telle sorte que

(6) $$\mathop{\mathrm{S}} MU = f,$$

afin que la fonction V (4) satisfasse à la dernière condition (3).

Il faut alors établir, en coordonnées obliques, le théorème indispensable du § LVIII. L'intégration, faite dans toute l'étendue ϖ' du corps, étant indiquée par le sym-

bole

$$\int_{\varpi'} d\varpi' \ldots,$$

le nouvel élément de volume $d\varpi'$ est un parallélipipède obliquangle, aux côtés (dx', dy', dz'), et, d'après le § LII, on a

$$d\varpi' = \sqrt{\rho}\, dx'\, dy'\, dz',$$

où ρ représente la somme trigonométrique

$$\rho = 1 + 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\alpha'' - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha' - \cos^2\alpha'',$$

$(\alpha, \alpha', \alpha'')$ étant les angles plans de l'angle trièdre formé par les axes obliques. Le facteur constant $\sqrt{\rho}$, qui se place en dehors des intégrales en (x', y', z') peut être, ou négligé, ou rétabli, suivant qu'il est nécessaire.

En le négligeant d'abord, si l'on adopte la même marche qu'au § LVIII, et qu'on parte successivement de la première (5) en (U, θ^2), et de son homologue en (U', θ'^2), respectivement multipliées par $U'dx'dy'dz'$ et $U dx'dy'dz'$, puis intégrées entre les limites des (x', y', z') assignées par la surface σ, dont la température est partout fixée à zéro, on obtient une double expression, qui devient

$$\int_{\varpi'} d\varpi' \left(A^2 \frac{dU}{dx'}\frac{dU'}{dx'} + B^2 \frac{dU}{dy'}\frac{dU'}{dy'} + C^2 \frac{dU}{dz'}\frac{dU'}{dz'}\right)$$
$$= \theta^2 \int_{\varpi'} d\varpi'\, UU' = \theta'^2 \int_{\varpi'} d\varpi'\, UU',$$

par le rétablissement du facteur $\sqrt{\rho}$. D'où résulte nécessairement

$$(7) \qquad \int_{\varpi'} d\varpi' . UU' = 0,$$

quand θ'^2 n'est pas égal à θ^2. Et, d'après ce théorème (7),

on isole le coefficient M de U, en multipliant l'équation (6) par $U d\varpi'$, et intégrant dans ϖ'. Ce qui donne

$$(8) \qquad M = \frac{\int_{\varpi'} d\varpi' . fU}{\int_{\varpi'} d\varpi' U^2}.$$

§ CXV.

PARALLÉLIPIPÈDE OBLIQUANGLE.

La solution générale qui précède, s'applique, sans aucune difficulté nouvelle, au refroidissement par communication du parallélipipède obliquangle, dont les côtés sont parallèles aux axes. L'équation à la surface devient le groupe

$$(9) \qquad V_\sigma = 0, \quad \text{quand} \begin{cases} x' = 0; & x' = n\,A; \\ y' = 0; & y' = n'\,B; \\ z' = 0; & z' = n''C; \end{cases}$$

(n, n', n'') sont les rapports respectifs des côtés du prisme aux lignes de mêmes directions (A, B, C); un de ces nombres peut être l'unité, puisqu'on peut prendre arbitrairement (A, ou B, ou C).

Les équations (5) et (9) sont vérifiées par les valeurs

$$(10) \qquad \begin{cases} U = \sin i\pi \dfrac{x'}{nA} \sin i'\pi \dfrac{y'}{n'B} \sin i''\pi \dfrac{z}{n''C}, \\ \theta^2 = \left[\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{i'}{n'}\right)^2 + \left(\dfrac{i''}{n''}\right)^2\right]\pi^2; \end{cases}$$

(i, i', i'') étant des nombres entiers quelconques. L'intégration, faite dans toute l'étendue de ϖ', a pour limites

$$\int_{\varpi'} d\varpi' \ldots = \sqrt{\rho} \int_0^{nA} dx' \int_0^{n'B} dy' \int_0^{n''C} dz' \ldots,$$

une triple application du théorème (20), § LX, donne

$$\int_{\varpi'} d\varpi' U^2 = \sqrt{\rho}\,\frac{nn'n''\,\mathrm{ABC}}{8},$$

et le coefficient M (8) devient

$$(11)\qquad \mathrm{M} = \frac{8}{nn'n''\,\mathrm{ABC}} \int_0^{n\mathrm{A}} dx' \int_0^{n'\mathrm{B}} dy' \int_0^{n''\mathrm{C}} dz' . f\mathrm{U}.$$

Pour faciliter le langage, nous emprunterons, au vocabulaire des cristallographes, plusieurs expressions. Nous appellerons *primitif*, ou forme *primitive*, le prisme oblique dont les côtés sont (A, B, C); *faces primitives*, toutes celles d'un polyèdre, quel qu'il soit, qui seront parallèles à des faces du prisme primitif; *faces tangentes*, toutes celles qui seront parallèles à des plans diagonaux de la même forme primitive. Ainsi, dans le parallélipipède obliquangle, qui vient d'être traité, les six faces sont primitives, et, comme on va le voir, d'autres polyèdres, pareillement traitables, ont des faces tangentes.

§ CXVI.

PRISME A DEUX ARÊTES PRIMITIVES.

Quand la base parallélogramme du prisme oblique a deux *arêtes primitives*, c'est-à-dire proportionnelles à celles (A, B) de la forme primitive, les deux nombres (n, n') sont égaux, et on peut leur substituer l'unité. Alors les deux fonctions

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \sin i\pi\frac{x'}{\mathrm{A}} \sin i'\pi\frac{y'}{\mathrm{B}} \sin i''\pi\frac{z}{n''\mathrm{C}}, \\ \mathrm{U}' = \sin i'\pi\frac{x'}{\mathrm{A}} \sin i\,\pi\frac{y'}{\mathrm{B}} \sin i''\pi\frac{z}{n''\mathrm{C}}, \end{cases}$$

correspondent à une même valeur de θ^2, qui est de

$$(13)\qquad \theta^2 = \left[i^2 + i'^2 + \left(\frac{i''}{n''}\right)^2 \right] \pi^2.$$

Une même exponentielle appartient à deux termes, et la fonction V devient

$$(14)\qquad V = \left\{ \begin{array}{l} \sum\sum (MU + M'U') e^{-\theta^2 \frac{t}{k}} \\ \quad + \sum NW e^{-\varpi^2 \frac{t}{k}}. \end{array} \right.$$

La série double réunit les termes, dans lesquels (i, i') sont égaux, et qui restent seuls non accouplés ; le facteur W et la constante ϖ^2 étant

$$(15)\qquad \left\{ \begin{array}{l} W = \sin i\pi \frac{x'}{A} \sin i\pi \frac{y'}{B} \sin i''\pi \frac{z'}{n''C}, \\ \varpi^2 = \left[2 i^2 + \left(\frac{i''}{n''}\right)^2 \right] \pi^2. \end{array} \right.$$

La série multiple (14) a la même forme que la série générale (3), § LXV, appartenant au prisme droit à base carrée, et conduit, comme cette dernière, à des séries qui ne sont que particulières pour le parallélipipède ayant deux arêtes primitives, mais qui sont générales pour d'autres polyèdres.

§ CXVII.

PREMIER PLAN DIAGONAL A ZÉRO.

Si, les coefficients N étant nuls, ceux (M, M') sont égaux et de signes contraires dans chaque terme, la fonction V (14) devient

$$(16)\qquad V = \sum\sum M (U - U') e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}.$$

Or la différence (U — U′) des facteurs (12) est nulle quand $\frac{y'}{B} = \frac{x'}{A}$, et change de signe, en conservant la même valeur absolue, quand on y remplace $\frac{y'}{B}$ par $\frac{x'}{A}$ et $\frac{x'}{A}$ par $\frac{y'}{B}$. Donc, lorsque la série (16) exprime le refroidissement du prisme ayant deux arêtes primitives (A, B), la température reste fixée à zéro sur le plan diagonal dont l'équation est

$$(17) \qquad \frac{y'}{B} = \frac{x'}{A};$$

et, de plus, les températures sont toujours égales et de signes contraires pour deux points, le premier m', aux coordonnées quelconques (x', y', z'), le second m'', dont les coordonnées (x'', y'', z'') sont liées à celles de m' par les équations

$$(18) \qquad \begin{cases} z'' = z', \\ \frac{y''}{B} = \frac{x'}{A}, \quad \frac{x''}{A} = \frac{y'}{B}. \end{cases}$$

Puisque $z'' = z'$, la droite $\overline{m''m'}$ est parallèle à la base du prisme oblique, et les deux dernières relations (18) donnant

$$\frac{y''}{B} + \frac{x''}{A} = \frac{y'}{B} + \frac{x'}{A},$$

$$\frac{\left(\frac{y''+y'}{2}\right)}{B} = \frac{\left(\frac{x''+x'}{2}\right)}{A},$$

cette droite est parallèle au second plan diagonal que représente l'équation

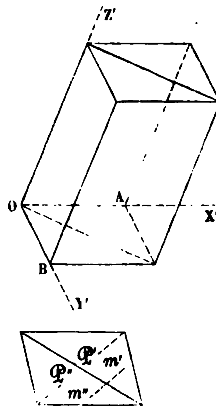
$$(19) \qquad \frac{y'}{B} + \frac{x'}{A} = 1,$$

et coupée en son point milieu par le premier (17). D'après

cela, on peut (on doit même) dire que les deux points (m', m'') sont symétriquement placés par rapport au plan diagonal (17) ; en admettant un genre de symétrie oblique, qui n'est au fond qu'une généralisation de la symétrie propre aux axes rectangulaires.

Ainsi, le prisme oblique dont la base parallélogramme a deux arêtes primitives étant ainsi représenté,

Fig. 16.



la série (16) n'exprime particulièrement son refroidissement, que si l'état initial apporte une symétrie calorifique (obliquement) inverse, dans les deux prismes triangulaires 𝔓', 𝔓'', équivalents, symétriques, mais non superposables, découpés par le plan diagonal (17). De là résulte que la même série exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement par communication de 𝔓', ou de 𝔓'', nouveaux prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, qui ont, chacun, quatre faces primitives, et une face tangente.

L'équation à la surface est : $V_\tau = 0$, quand

$$z = 0; \quad z = n''C;$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= 0; \\ y' &= \frac{B}{A}x'; \\ x' &= A; \end{aligned}\right\} \text{ pour } \mathfrak{P}'.$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0; \\ x' &= \frac{A}{B}y'; \\ y' &= B; \end{aligned}\right\} \text{ pour } \mathfrak{P}''.$$

La triple intégration, faite dans ϖ', étant indiquée symboliquement par

$$\int_{\varpi'} d\varpi' \ldots = \sqrt{\rho}\int_0^{n''C} dz' \int_{\sigma'} d\sigma' \ldots,$$

on prend respectivement

$$(20) \quad \int_{\sigma'} d\sigma' \ldots = \left\{\begin{aligned} &\int_0^A dx' \int_0^{\frac{B}{A}x'} dy' \ldots, \quad \text{pour } \mathfrak{P}', \\ &\int_0^A dy' \int_0^{\frac{A}{B}y'} dx' \ldots, \quad \text{pour } \mathfrak{P}''. \end{aligned}\right.$$

Par les mêmes raisonnements qu'au § LXXI, on arrive, dans les deux cas, à

$$\int_{\varpi'} d\varpi' (U - U')^2 = \sqrt{\rho}\,\frac{n''ABC}{8}.$$

Ce qui donne enfin, pour le coefficient M, la valeur géné

rale

$$(21)\qquad M = \frac{8}{n''ABC}\int_0^{n''C} dz' \int_{\sigma'} d\sigma' . f(U - U')$$

écrite avec l'un ou l'autre des signes (20), suivant que l'on traite $\mathfrak{P}'$, ou $\mathfrak{P}''$.

§ CXVIII.

SECOND PLAN DIAGONAL A ZÉRO.

La série générale (14) peut être décomposée en deux parties, l'une où les entiers (i, i') ont des parités différentes, l'autre où ces entiers ont même parité. Si l'on prend $M' = M$ dans la première série partielle, et $M' = -M$ dans la seconde, ou mieux si, posant

$$\cos i\pi = \gamma, \quad \cos i'\pi = \gamma',$$

on prend dans la série totale $M' = -\gamma\gamma' M$, la fonction V devient

$$(22)\qquad V = \sum\sum M(U - \gamma\gamma' U') e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

et les termes aux facteurs W disparaissent, puisque l'on a $\gamma\gamma' = 1$ et $U' = U$ quand $i' = i$. Or, dans $(U - \gamma\gamma' U')$, le facteur en (x', y') est

$$\left(\sin i\pi\frac{x'}{A}\sin i'\pi\frac{y'}{B} - \gamma\gamma'\sin i'\pi\frac{x'}{A}\sin i\pi\frac{y'}{B}\right);$$

si l'on y fait $\frac{y'}{B} = 1 - \frac{x'}{A}$, ce facteur devient

$$-(\gamma' - \gamma^2\gamma')\sin i\pi\frac{x'}{A}\sin i'\pi\frac{x'}{A},$$

ou zéro, puisque $\gamma^2 = 1$; et si, dans le même facteur, on remplace $\frac{x'}{A}$ par $\left(1 - \frac{y'}{B}\right)$ et $\frac{y'}{B}$ par $\left(1 - \frac{x'}{A}\right)$, il devient

$$\left(\gamma\gamma' \sin i\pi \frac{y'}{B} \sin i'\pi \frac{x'}{A} - \gamma^2\gamma'^2 \sin i'\pi \frac{y'}{B} \sin i\pi \frac{x'}{A}\right),$$

c'est-à-dire qu'il reprend la même valeur absolue avec un signe contraire, puisque $\gamma^2\gamma'^2 = 1$.

Donc, lorsque la série (22) exprime le refroidissement du prisme ayant deux arêtes primitives (A, B), la température reste fixée à zéro sur le plan diagonal (19); et, de plus, les températures sont toujours égales et de signes contraires pour deux points, le premier m', aux coordonnées quelconques (x', y', z'), le second m'', dont les coordonnées (x'', y'', z'') sont liées à celles de m' par les équations

$$z'' = z',$$
$$\frac{y''}{B} = 1 - \frac{x'}{A}, \quad \frac{x''}{A} = 1 - \frac{y'}{B},$$

desquelles les deux dernières donnent

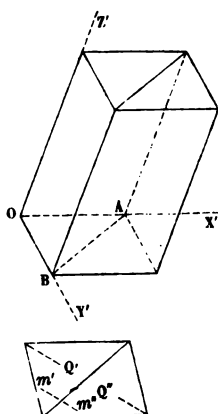
$$\frac{y''}{B} - \frac{x''}{A} = \frac{y'}{B} - \frac{x'}{A},$$
$$\frac{\left(\frac{y'' + y'}{2}\right)}{B} + \frac{\left(\frac{x'' + x'}{2}\right)}{A} = 1;$$

ce qui montre que la droite $\overline{m''m'}$ est parallèle à la base du prisme, parallèle au premier plan diagonal (17), et coupée en son point milieu par le second (19); c'est-à-dire que les deux points (m', m''), sont symétriquement placés par rapport à ce dernier plan (19), puisque nous adoptons les symétries obliques.

Ainsi, la série (22) n'exprime particulièrement le refroidissement du prisme oblique dont la base parallélogramme a deux arêtes primitives (A, B), que si l'état initial apporte une symétrie calorifique (obliquement) inverse, dans les

deux prismes triangulaires Q′, Q″, équivalents, symétriques, mais non superposables, découpés par le plan diagonal (19). De là résulte que la même série exprimera géné-

Fig. 17.



ralement, ou pour tout état initial, le refroidissement par communication de Q′, ou de Q″; autres prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, ayant encore, chacun, quatre faces primitives et une face tangente, et qui peuvent différer beaucoup, quant à la forme, de $\mathfrak{Q}'$ et de $\mathfrak{Q}''$.

L'équation à la surface est : $V_\sigma = 0$, quand

$$z' = 0; \quad z' = n''C';$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= 0; \\ y' &= B - \frac{B}{A}x'; \\ x' &= A; \end{aligned}\right\} \text{pour } Q'.$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= A - \frac{A}{B}y'; \\ x' &= A; \\ y' &= B; \end{aligned}\right\} \text{pour } Q''.$$

Et l'on arrive définitivement au coefficient

$$(23) \qquad M = \frac{8}{n''ABC} \int_0^{n''C} dz' \int_{\sigma'} d\sigma' . f(U - \gamma\gamma' U'),$$

en prenant respectivement

$$\int_{\sigma'} d\sigma' \ldots = \begin{cases} \displaystyle\int_0^A dx' \int_0^{B - \frac{B}{A}x'} dy' \ldots, & \text{pour } Q', \\ \displaystyle\int_0^B dy' \int_{A - \frac{A}{B}y}^{y'} dx' \ldots, & \text{pour } Q''. \end{cases}$$

§ CXIX.

LES DEUX PLANS DIAGONAUX A ZÉRO.

Si l'on ne conserve, dans les deux séries (16) et (22), que les termes où les entiers (i, i') ont même parité, ces deux séries, ainsi réduites, se confondent en une seule, qui réunit leurs propriétés caractéristiques. Alors la température V reste fixée à zéro sur les deux plans diagonaux (17) et (19); de plus, les températures sont toujours égales et de signes contraires pour deux points (m', m''), symétriquement placés, soit par rapport au plan (17), soit par rapport au plan (19); la droite $\overline{m'm''}$ ayant dans chaque cas la direction oblique correspondante.

Ainsi, la série (16), limitée aux termes où les entiers (i, i'), ont même parité, n'exprime particulièrement le refroidissement du prisme oblique dont la base parallélogramme a deux arêtes primitives (A, B), que si l'état initial apporte une symétrie calorifique (obliquement) inverse, par rapport aux deux plans diagonaux, qui découpent le polyèdre en quatre prismes triangulaires,

p, p', p'', p''', équivalents, symétriques, mais non superposables. De là résulte que la même série exprimera généralement, ou pour tout état initial, le refroidissement par communication de p, ou de p', ou de p'', ou de p'''; nouveaux prismes triangulaires $\frac{1}{4}$, dont la forme n'est plus celle des prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, et qui ont, chacun, trois faces primitives, et deux faces tangentes (*fig.* 18, p. 222).

L'équation à la surface est : $V_\sigma = 0$, quand

$$z' = 0; \quad z' = n''C;$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= 0; \\ x' &= \frac{A}{B}y'; \\ x' &= A - \frac{A}{B}y'; \end{aligned}\right\} \text{pour } p.$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0; \\ y' &= \frac{B}{A}x'; \\ y' &= B - \frac{B}{A}x'; \end{aligned}\right\} \text{pour } p'.$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{A}{B}y'; \\ x' &= A - \frac{A}{B}y'; \\ y' &= B; \end{aligned}\right\} \text{pour } p''.$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{B}{A}x'; \\ y' &= B - \frac{B}{A}x'; \\ x' &= A; \end{aligned}\right\} \text{pour } p'''.$$

Et le coefficient M, où le dénominateur n'est évidemment que la moitié de celui qui a été trouvé pour les prismes

triangulaires $\frac{1}{2}$, est définitivement

$$(24)\qquad M = \frac{16}{n''ABC}\int_0^{n''C} dz' \int_{\sigma'} d\sigma'.f(U-U)$$

en prenant respectivement

$$\int_{\sigma'} d\sigma'\ldots = \begin{cases} \int_0^{\frac{B}{2}} dy' \int_{\frac{A}{B}y'}^{A-\frac{A}{B}y'} dx',\ldots, & \text{pour } p, \\ \int_0^{\frac{A}{2}} dx' \int_{\frac{B}{A}x'}^{B-\frac{B}{A}x'} dy',\ldots, & \text{pour } p', \\ \int_{\frac{B}{2}}^{B} dy' \int_{A-\frac{A}{B}y'}^{\frac{A}{B}y'} dx',\ldots, & \text{pour } p'', \\ \int_{\frac{A}{2}}^{A} dx' \int_{B-\frac{B}{A}x'}^{\frac{B}{A}x'} dy',\ldots, & \text{pour } p'''. \end{cases}$$

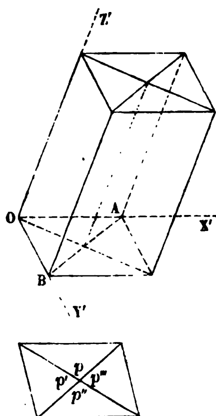
§ CXX.

PRISMES TRIANGULAIRES DISTINCTS.

En résumé, la série générale (14), relative au prisme oblique dont la base parallélogramme a deux arêtes primitives (A, B), conduit à des séries particulières qui permettent de traiter, généralement, le refroidissement par communication, de quatre prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, P′, P″, Q′, Q″, et de quatre prismes triangulaires $\frac{1}{4}$, p, p', p'', p'''.

Si l'on considère successivement, dans le parallélipipède obliquangle du § CXV, les cas de ($n'' = n = 1$), et de ($n' = n'' = 1$), on établit deux séries générales, relatives aux prismes obliques dont les bases parallélogrammes ont deux arêtes primitives, (C, A) pour l'une, (B, C) pour l'autre, et qui conduisent, chacune, à des séries particulières, homologues des précédentes, et exprimant, comme elles, la loi générale du refroidissement par communication de huit polyèdres distincts.

Fig. 18.



Ce qui donne, en tout, vingt-quatre prismes triangulaires, tous également traitables, et dont les formes peuvent être très-différentes. La série du prisme droit à base carrée n'en donne qu'un, toujours de même forme. Mais, il y a plus encore, la série particulière (22) conduit, par une marche inverse, et en quelque sorte ascendante, à une série générale pour un nouveau parallélipipède obliquangle.

§ CXXI.

TERMES SIMPLES COMPLÉMENTAIRES.

Dans la série (22), le facteur en (x', y') de $(U - \gamma\gamma' U')$ s'annule, non-seulement sur le premier des quatre plans

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{x'}{A} + \dfrac{y'}{B} - 1 = 0, \\ \dfrac{x'}{A} - \dfrac{y'}{B} - 1 = 0, \\ \dfrac{x'}{A} - \dfrac{y'}{B} + 1 = 0, \\ \dfrac{x'}{A} + \dfrac{y'}{B} + 1 = 0, \end{cases}$$

mais aussi sur les trois autres, car en y faisant

$$\frac{y'}{B} = \pm 1 \pm \frac{x'}{A},$$

ce facteur devient

$$\pm(\gamma' - \gamma^2\gamma') \sin i\pi \frac{x'}{A} \sin i'\pi \frac{x'}{A},$$

ou zéro, dans tous les cas. Si l'on remplace dans les (U, U') (12) les sinus des arcs en (x', y') par leurs cosinus, ou si l'on pose

$$\mho = \cos i\pi \frac{x'}{A} \cos i'\pi \frac{y'}{B} \sin i''\pi \frac{z}{C},$$

$$\mho' = \cos i'\pi \frac{x'}{A} \cos i\pi \frac{y'}{B} \sin i''\pi \frac{z}{C},$$

le facteur en (x', y') de $(\mho - \gamma\gamma' \mho')$ s'annulera pareillement sur les quatre plans (25), car en y faisant

$$\frac{y'}{B} = \pm 1 \pm \frac{x'}{A},$$

il deviendra

$$(\gamma' - \gamma^2\gamma')\cos i\pi\frac{x'}{A}\cos i'\pi\frac{x'}{A},$$

ou encore zéro.

D'autres fonctions trigonométriques satisfont aussi à la même condition. En effet, prenant

$$U_1 = \sin\frac{2j+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\cos\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{y'}{B}\sin i''\pi\frac{z}{C},$$

$$U'_1 = \sin\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\cos\frac{2j+1}{2}\pi\frac{y'}{B}\sin i''\pi\frac{z}{C},$$

$$\mho_1 = \cos\frac{2j+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\sin\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{y'}{B}\sin i''\pi\frac{z}{C},$$

$$\mho'_1 = \cos\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\sin\frac{2j+1}{2}\pi\frac{y'}{B}\sin i''\pi\frac{z}{C},$$

où (j, j') sont des nombres entiers, et posant, pour simplifier,

$$\sin\frac{2j+1}{2}\pi = g, \quad \sin\frac{2j'+1}{2}\pi = g',$$

les facteurs en (x', y') de $(U_1 - gg'U'_1)$ et de $(\mho_1 - gg'\mho'_1)$ s'annuleront sur les quatre plans (25) : car, en y faisant

$$\frac{y'}{B} = \pm 1 \pm \frac{x'}{A},$$

ils deviendront respectivement

$$\pm(g' - g^2g')\sin\frac{2j+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\sin\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{x'}{A},$$

$$\pm(g' - g^2g')\cos\frac{2j+1}{2}\pi\frac{x'}{A}\cos\frac{2j'+1}{2}\pi\frac{x'}{A},$$

ou zéro, puisque $g^2 = 1$.

§ CXXII.

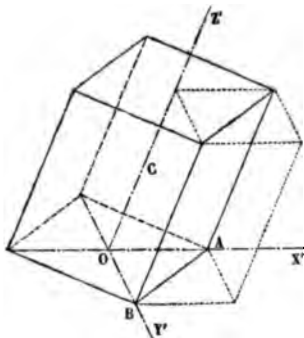
PRISME TANGENT SUIVANT LES ARÊTES.

De là résulte que la série

$$(26)\ V = \left\{ \begin{array}{l} \sum[M(U - \gamma\gamma' U') + \mathfrak{M}(\mho - \gamma\gamma'\mho')]e^{-\theta^2 \frac{t}{k}} \\ + \sum[M_1(U_1 - gg'U'_1) + \mathfrak{M}_1(\mho_1 - gg'\mho'_1)]e^{-\theta^2 \frac{t}{k}} \end{array} \right.$$

a toute la généralité nécessaire pour exprimer le refroidissement par communication d'un nouveau prisme oblique, dont les bases parallélogrammes sont $(z' = 0,\ z' = n''C)$, et les faces latérales les plans (25). Nous appellerons ce nouveau polyèdre, qui a deux faces primitives et quatre faces tangentes, le *prisme tangent suivant les arêtes* C de la forme primitive.

Fig. 19.



L'équation à la surface est : $V_\sigma = 0$, sur les six faces définies. La triple intégration, faite dans le nouveau volume

ϖ', étant toujours indiquée par le même symbole, on doit prendre actuellement

$$\int_{\sigma'} d\sigma' \ldots = \int_{-A}^{+A} dx' \int_{-\left(B-\frac{B}{A}x\right)}^{+\left(B-\frac{B}{A}x'\right)} dy' \ldots .$$

On reconnaît, à la seule inspection de ce signe, que l'intégrale du dénominateur des coefficients, doit être quadruple de celle qui répond au triangulaire $\frac{1}{2}$, Q' du § CXVIII, et l'on arrive à la valeur générale

$$\frac{2}{n''\,\mathrm{ABC}} \int_0^{n''C} dz' \int_{-A}^{+A} dx' \int_{-\left(B-\frac{B}{A}x'\right)}^{+\left(B-\frac{B}{A}x'\right)} dy' . f\,\mathcal{A},$$

qui donnera successivement les coefficients $(M, \mathfrak{M}, M_1, \mathfrak{M}_1)$, en mettant pour chacun, au lieu de $\mathcal{A}$, son facteur binôme dans la série (26).

On traite pareillement le prisme tangent suivant les arêtes B, ou suivant les arêtes A, de la forme primitive; ce qui donne trois parallélipipèdes obliques de formes différentes. La même extension appliquée aux séries provenant du prisme droit à base carrée, ne donne aucun nouveau polyèdre.



TREIZIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES. — PRISMES DES FACETTES.

Parallélipipède à trois arêtes primitives. — Refroidissement par communication de ses tétraèdres $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{24}$. — De ses octaèdres et de son dodécaèdre rhomboïdal. — Prismes formés par les facettes non tangentes sur les arêtes.

---

§ CXXIII.

PRISME A TROIS ARÊTES PRIMITIVES.

Lorsque le parallélipipède obliquangle, du § CXV, a ses trois arêtes *primitives*, c'est-à-dire proportionnelles à (A, B, C), les nombres (n, n', n'') étant égaux, on peut leur substituer l'unité. Alors les six fonctions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
U_1 &= \sin i\pi \frac{x'}{A} \sin i'\pi \frac{y'}{B} \sin i''\pi \frac{z'}{C},\\
U_2 &= \sin i'\pi \frac{x'}{A} \sin i''\pi \frac{y'}{B} \sin i\pi \frac{z'}{C},\\
U_3 &= \sin i''\pi \frac{x'}{A} \sin i\pi \frac{y'}{B} \sin i'\pi \frac{z'}{C},\\
U'_1 &= \sin i''\pi \frac{x'}{A} \sin i'\pi \frac{y'}{B} \sin i\pi \frac{z'}{C},\\
U'_2 &= \sin i'\pi \frac{x'}{A} \sin i\pi \frac{y'}{B} \sin i''\pi \frac{z'}{C},\\
U'_3 &= \sin i\pi \frac{x'}{A} \sin i''\pi \frac{y'}{B} \sin i'\pi \frac{z'}{C},
\end{aligned}\right.$$

correspondent à une même valeur de θ^2, qui est

$$(2)\qquad \theta^2 = (i^2 + i'^2 + i''^2)\pi^2.$$

Une même exponentielle appartient à six termes, et la fonction V étant prise sous la forme

$$(3) \qquad V = \sum U e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

la facteur U sera le polynôme

$$(4) \qquad U = \left\{ \begin{array}{l} M_1 U_1 + M'_1 U'_1 \\ + M_2 U_2 + M'_2 U'_2 \\ + M_3 U_3 + M'_3 U'_3. \end{array} \right.$$

La série (3) a la même forme que la série générale (8), § LXXVII, appartenant au cube, et conduit, comme cette dernière, à des séries qui ne sont que particulières pour le parallélipipède primitif, mais qui sont générales pour d'autres polyèdres.

Soient : O le sommet pris pour origine, et O′ le sommet opposé; $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, les côtés de la forme primitive; A′, B′, C′, les sommets respectivement opposés à ceux A, B, C. Le polyèdre a quatre diagonales intérieures $\overline{OO'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, et six plans diagonaux, réunissant chacun deux cotés parallèles et opposés. Les équations de ces plans sont rangées dans le tableau synoptique

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} & \overbrace{\frac{x'}{A} + \frac{y'}{B} = 1, \quad \underbrace{\frac{y'}{B} = \frac{z'}{C}}_{\overline{OO'}}, \quad \frac{z'}{C} + \frac{x'}{A} = 1,}^{\overline{AA'}} & \\ \overline{BB'} & \frac{z'}{C} = \frac{x'}{A}, \qquad \frac{x'}{A} = \frac{y'}{B}, & \overline{CC'} \\ & \frac{y'}{B} + \frac{z'}{C} = 1, & \end{array}$$

de telle sorte, que chaque accolade extérieure embrasse les

trois plans qui se coupent suivant une même diagonale $\overline{AA'}$, ou $\overline{BB'}$, ou $\overline{CC'}$, et que les trois accolades intérieures désignent les plans qui se coupent suivant $\overline{OO'}$.

§ CXXIV.

TÉTRAÈDRES $\frac{1}{6}$. — PREMIÈRE SÉRIE.

Cela posé, la série (3) exprimera que la température reste fixée à zéro sur les trois plans diagonaux menés par $\overline{OO'}$, et pas sur les autres, si l'on prend le polynôme

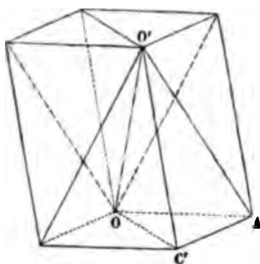
$$(6)\qquad U = M \left\{ \begin{array}{c} U_1 - U'_1 \\ + U_2 - U'_2 \\ + U_3 - U'_3 \end{array} \right\} = M\mho$$

qui devient identiquement zéro, quand on y fait

$$(7)\qquad \frac{y'}{B} = \frac{z'}{C}, \quad \text{ou} \quad \frac{z'}{C} = \frac{x'}{A}, \quad \text{ou} \quad \frac{x'}{A} = \frac{y'}{B}.$$

Ces trois plans à zéro découpent le polyèdre en six pyra-

Fig. 20.



mides, ici tracées. On constate, comme au § CXVII, que $\mho$ (6) a la même valeur absolue, mais avec des signes contraires,

pour deux points (m', m'') symétriquement placés par rapport à l'un quelconque des plans (7); la droite $\overline{m'm''}$ ayant, dans chaque cas, la direction oblique correspondante.

Ainsi la série (3), composée avec le facteur U (6), n'exprime particulièrement le refroidissement du polyèdre primitif, que si l'état initial apporte une symétrie calorifique inverse, par rapport aux trois plans (7). De là résulte que la même série exprimera généralement le refroidissement par communication de l'une quelconque des six pyramides de la figure précédente; nouveaux tétraèdres $\frac{1}{6}$, équivalents, obliquement symétriques, mais non superposables, et qui ont chacun deux faces primitives et deux faces tangentes.

Si l'on prend pour exemple le tétraèdre OO'AC', dont les faces sont

$$z' = 0, \quad \frac{y'}{B} = \frac{z'}{C}, \quad \frac{x'}{A} = \frac{y'}{B}, \quad x' = A,$$

on reconnaît, comme au § LXXIX, que le dénominateur du coefficient est le même que pour le polyèdre primitif, et la valeur de ce coefficient est définitivement

$$(8) \qquad M = \frac{8}{ABC} \int_0^A dx' \int_0^{\frac{B}{A}x'} dy' \int_0^{\frac{C}{B}y'} dz' \,.\, f\mho.$$

§ CXXV.

AUTRES SÉRIES DE TÉTRAÈDRES $\frac{1}{6}$.

Pour que la série (3) exprime que la température reste fixée à zéro sur les trois plans diagonaux menés par $\overline{AA'}$,

et pas sur les autres, il faut que le polynôme U (4) puisse se mettre successivement sous les trois formes

$$\left\{\begin{aligned} &M_1(U_1-\gamma\gamma'\,U'_2)\\ &+M_2(U_2-\gamma'\gamma''\,U'_1)\\ &+M_3(U_3-\gamma''\gamma\,U'_3),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &M_1(U_1-U'_3)\\ &+M_2(U_2-U'_2)\\ &+M_3(U_3-U'_1),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &M_1(U_1-\gamma''\gamma\,U'_1)\\ &+M_2(U_2-\gamma\gamma'\,U'_3)\\ &+M_3(U_3-\gamma'\gamma''\,U'_2),\end{aligned}\right.$$

où $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ représentent respectivement $(\cos i\pi,\ \cos i'\pi,\ \cos i''\pi)$; car la première est nécessaire, d'après le § CXVIII, pour que U s'annule sur le plan $\frac{x'}{A}+\frac{y'}{B}=1$, la seconde pour que U soit zéro sur le plan $\frac{y'}{B}=\frac{z'}{C}$, et la troisième (homologue de la première) pour que U s'annule sur le plan $\frac{z'}{C}+\frac{x'}{A}=1$.

Les coefficients des (U'_1, U'_2, U'_3) doivent retrouver les mêmes valeurs dans les trois formes; ce qui exige que l'on ait les trois lignes d'identités

$$\begin{aligned} M_2\gamma'\gamma'' &= M_3 = M_1\gamma''\gamma = -M'_1,\\ M_1\gamma\gamma' &= M_2 = M_3\gamma'\gamma'' = -M'_2,\\ M_3\gamma''\gamma &= M_1 = M_2\gamma\gamma' = -M'_3,\end{aligned}$$

qui, respectivement multipliées par $(\gamma'', \gamma', \gamma)$, se concentrent dans celle-ci

$$M_1\gamma = M_2\gamma' = M_3\gamma'' = -M'_1\gamma'' = -M'_2\gamma' = -M'_3\gamma,$$

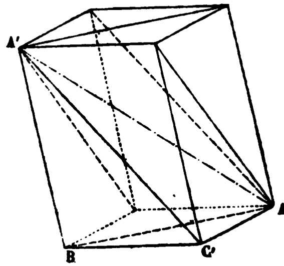
puisque $\gamma''^2=\gamma'^2=\gamma^2=1$; et, si l'on prend, pour la valeur

commune de cette dernière ligne, le produit d'une seule constante M par $\gamma\gamma'\gamma''$, on en déduit les valeurs des six coefficients du polynôme U (4), qui devient

$$(9)\qquad U = M\left\{\begin{array}{l} \gamma'\gamma''U_1 - \gamma\gamma'U'_1 \\ +\gamma''\gamma U_2 - \gamma''\gamma U'_2 \\ +\gamma\gamma' U_3 - \gamma'\gamma''U'_3 \end{array}\right\} = MU'.$$

Composée avec cette valeur (9) de U, la série (3) exprimera généralement le refroidissement par communication de l'une quelconque des six pyramides, que découpent, dans le polyèdre primitif, les trois plans diagonaux menés par $\overline{AA'}$,

Fig. 21.



autres tétraèdres $\frac{1}{6}$, qui ont encore chacun deux faces primitives et deux faces tangentes. Si l'on prend pour exemple le tétraèdre AA'BC', le coefficient M aura la valeur

$$(10)\quad M = \frac{8}{ABC}\int_0^B dy'\int_{A-\frac{A}{B}y'}^{A} dx'\int_0^{C-\frac{C}{A}x'} dz'.fU'.$$

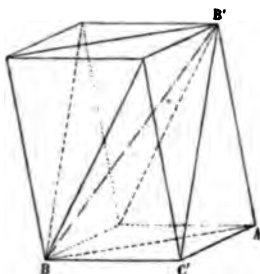
On trouve, de la même manière, que la série (3) exprimera que la température reste fixée à zéro sur les trois plans diagonaux menés par $\overline{BB'}$, et pas sur les autres, si

l'on prend

$$(11)\qquad U = M\left\{\begin{array}{l}\gamma''\gamma U_1 - \gamma''\gamma U'_1\\ +\gamma\gamma' U_2 - \gamma'\gamma'' U'_2\\ +\gamma'\gamma'' U_3 - \gamma\gamma' U'_3\end{array}\right\} = MU'',$$

et qu'elle donnera, conséquemment, la loi générale du refroidissement par communication de l'une quelconque des six pyramides découpées par ces plans.

Fig. 22.



Si l'on prend pour exemple le tétraèdre BB'AC', le coefficient M aura la valeur

$$(12)\quad M = \frac{8}{ABC}\int_0^A dx' \int_{B-\frac{B}{A}x'}^{B} dy' \int_0^{C-\frac{C}{B}y'} dz'.fU''.$$

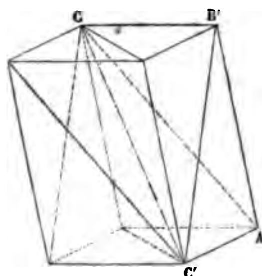
Enfin, la série (3) exprimera que les trois plans diagonaux menés par $\overline{CC'}$ sont seuls à zéro, si

$$(13)\qquad U = M\left\{\begin{array}{l}\gamma\gamma' U_1 - \gamma'\gamma'' U'_1\\ +\gamma'\gamma'' U_2 - \gamma\gamma' U'_2\\ +\gamma''\gamma U_3 - \gamma''\gamma U'_3\end{array}\right\} = MU''',$$

et donnera la loi générale du refroidissement par commu-

nication de l'une quelconque des six pyramides que découpent ces plans.

Fig. 23.



Si l'on prend pour exemple le tétraèdre CC'AB', le coefficient M aura la valeur

$$(14)\qquad M = \frac{8}{ABC}\int_0^A dx' \int_{C-\frac{C}{A}x'}^{C} dz' \int_0^{B-\frac{B}{C}z'} dy'.fU'''.$$

Tous ces détails étaient nécessaires : car les vingt-quatre tétraèdres $\frac{1}{6}$, donnés par la série du prisme oblique primitif, ont des formes distinctes, et qui peuvent être très-différentes. La série du cube n'en donne que deux, symétriques l'un de l'autre.

§ CXXVI.

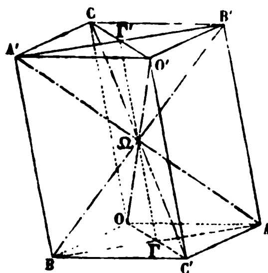
TÉTRAÈDRES $\frac{1}{24}$ DISTINCTS.

Maintenant, pour que la série (3) exprime que la température reste fixée à zéro sur les six plans diagonaux, il

faut que les quatre formes (6), (9), (11), (13), du polynôme U, deviennent identiques. Ce qui exige que $\gamma = \gamma' = \gamma''$, ou que les entiers($i$, i', i'') aient même parité dans chaque terme. Les six plans diagonaux à zéro découpent le polyèdre en vingt-quatre pyramides, ayant pour sommet commun le centre, Ω, du parallélipipède primitif, et pour bases les vingt-quatre triangles découpés sur les six faces par leurs diagonales; nouveaux tétraèdres $\frac{1}{24}$, ayant chacun une seule face primitive et trois faces tangentes, et dont les formes sont distinctes. Le cube n'en donne qu'un seul.

De là résulte que la série (3), écrite avec le facteur U (6), et limitée aux termes dans lesquels les entiers (i, i', i'') ont même parité, exprimera généralement le refroidissement par communication de l'une quelconque des vingt-quatre pyramides. Si l'on considère successivement les huit tétraèdres, ainsi tracés :

Fig. 24.



qui composent les deux pyramides quadrangulaires opposées, Ω A'CB'O', Ω AC'BO, et dont les arêtes communes, en Ω, ($\overline{\Gamma'\Omega}$, $\overline{\Omega\Gamma}$), sont parallèles à $\overline{OC}$, et égales à $\frac{1}{2}$ C; rappelant que le dénominateur du coefficient est le quart

de celui qui répond au polyèdre primitif, § LXXXII, la valeur de ce coefficient sera donnée par le tableau

$$(15)\quad M = \frac{32}{ABC}\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^{\frac{B}{2}} dy' \int_{\frac{A}{B}y'}^{A-\frac{A}{B}y'} dx' \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{C-\frac{C}{B}y'}^{C} dz'.f\mho \ldots C\Gamma'B' \\ \displaystyle\int_0^{\frac{C}{B}y'} dz'.f\mho \ldots O\Gamma A\end{array}\right. \\
\displaystyle\int_0^{\frac{A}{2}} dx' \int_{\frac{B}{A}x'}^{B-\frac{B}{A}x'} dy' \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{C-\frac{C}{A}x'}^{C} dz'.f\mho \ldots C\Gamma'A' \\ \displaystyle\int_0^{\frac{C}{A}x'} dz'.f\mho \ldots O\Gamma B\end{array}\right. \\
\displaystyle\int_{\frac{B}{2}}^{B} dy' \int_{A-\frac{A}{B}y'}^{\frac{A}{B}y'} dx' \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\frac{C}{B}y'}^{C} dz'.f\mho \ldots O'\Gamma'A' \\ \displaystyle\int_0^{C-\frac{C}{B}y'} dz'.f\mho \ldots C'\Gamma B\end{array}\right. \\
\displaystyle\int_{\frac{A}{2}}^{A} dx' \int_{B-\frac{B}{A}x'}^{\frac{B}{A}x'} dy' \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\frac{C}{A}x'}^{C} dz'.f\mho \ldots O'\Gamma'B' \\ \displaystyle\int_0^{C-\frac{C}{A}x'} dz'.f\mho \ldots C'\Gamma A\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

quand on traitera celui des huit tétraèdres, dont la base est en regard de l'intégrale triple correspondante. Deux autres tableaux, homologues du précédent, donneront les valeurs du coefficient M, pour les deux groupes de huit tétraè-

dres, dont les arêtes communes, en Ω, sont parallèles à $\overline{OB}$, et à $\overline{OA}$.

§ CXXVII.

OCTAÈDRES ET DODÉCAÈDRE.

Si l'on fait glisser, parallèlement à $\overline{CO}$, la pyramide quadrangulaire supérieure ΩA'CB'O', jusqu'à ce que sa base se confonde avec celle de la pyramide inférieure ΩBOAC' restée fixe, elle formera avec cette dernière un octaèdre oblique, dont le refroidissement par communication s'exprimera particulièrement, à l'aide de la série générale des tétraèdres $\frac{1}{24}$, lorsque l'état initial apportera une symétrie calorifique obliquement inverse, par rapport à ses trois plans diagonaux. Le glissement parallèle à $\overline{BO}$, ou à $\overline{AO}$, de l'une des deux pyramides (ΩC'BA'O', ΩAOCB'), ou (ΩB'AC'O', ΩCOBA'), donnera pareillement un octaèdre traitable dans les mêmes conditions par la même série. Les trois octaèdres que l'on obtient ainsi sont distincts; chacun d'eux a ses huit faces *tangentes*.

Maintenant, si l'on fait glisser à la fois les six pyramides quadrangulaires, dans des sens opposés, jusqu'à ce que chacune vienne se poser sur la face du prisme primitif, opposée à sa propre base, elles formeront avec ce prisme un dodécaèdre rhomboïdal oblique, décomposable en 48 tétraèdres $\frac{1}{24}$, et dont le refroidissement s'exprimera par la série générale des corps composants, quand les plans qui les découpent restent fixés à zéro. Ce dodécaèdre a toutes ses faces *tangentes*.

§ CXXVIII.

MULTIPLICITÉ DES PARALLÉLIPIPÈDES.

Les solutions particulières de ces derniers polyèdres, ainsi que toutes les solutions générales des précédents, ne sont que des conséquences de la solution obtenue pour le parallélipipède obliquangle, dont les arêtes sont parallèles au système de diamètres conjugués (A, B, C). Tout autre système (A', B', C') donnerait un groupe semblable de polyèdres en même nombre. Ainsi, lorsqu'un parallélipipède découpé dans un milieu cristallisé, quel qu'il soit, a ses arêtes parallèles à un système quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, on peut exprimer, par des séries trigonométriques et périodiques, son refroidissement par communication, ainsi que celui, des prismes triangulaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, des tétraèdres $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{24}$, des prismes tangents, des octaèdres, du dodécaèdre rhomboïdal, qui naissent de ce parallélipipède.

Comparée à celle de la cristallisation, cette fécondité est, à la fois, surabondante et incomplète. Surabondante, en ce qu'elle donne une infinité de prismes primitifs. Incomplète, en ce qu'elle paraît n'admettre, d'autre forme primitive que celle du parallélipipède, et d'autres formes secondaires que celles dont les faces, qui ne sont pas primitives, sont tangentes suivant les arêtes; laissant ainsi sans emploi, les facettes non tangentes sur les arêtes, les troncatures sur les sommets, si fréquentes dans les cristaux naturels. Essayons de combler cette dernière lacune.

§ CXXIX.

FACETTES NON TANGENTES.

Dans le prisme tangent suivant les arêtes C, du § CXXII, les quatre faces latérales sont parallèles aux facettes secondaires formées, d'après l'idée d'Haüy, par le décroissement d'un (A) sur un (B); il s'agit de reconnaître s'il n'est pas possible de traiter d'autres prismes, n'ayant aussi que deux faces primitives ($z = 0$, $z = n''C$), et dont les faces latérales soient parallèles à des facettes formées par le décroissement, de deux (A) sur un (B) ou inversement de un sur deux, de trois sur deux ou de deux sur trois, etc.

Généralement, (α, β) étant des nombres entiers différents, les plans parallèles aux facettes formées par le décroissement de α sur β, ou de β sur α, peuvent être représentés par les équations quadruples

$$\left.\beta\frac{x'}{A} \pm \alpha\frac{y'}{B} = \pm 1 \right\} P_1,$$
$$\left.\beta\frac{y'}{B} \pm \alpha\frac{x'}{A} = \pm 1 \right\} P_2.$$

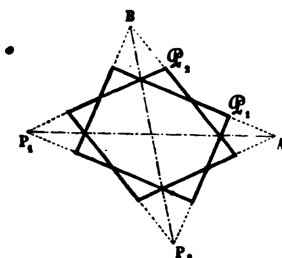
Ces huit plans tracent les bases parallélogrammes de quatre prismes, composant deux groupes distincts : dans le premier groupe (P_1, P_2) les plans diagonaux se confondent avec les faces primitives, et sont superposés; dans le second, ainsi défini

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 \left\{ \beta\frac{x'}{A} + \alpha\frac{y'}{B} = \pm 1, \quad \alpha\frac{x'}{A} - \beta\frac{y'}{B} = \pm 1, \right. \\ \mathfrak{P}_2 \left\{ \beta\frac{y'}{B} + \alpha\frac{x'}{A} = \pm 1, \quad \alpha\frac{y'}{B} - \beta\frac{x'}{A} = \pm 1; \right. \end{array} \right.$$

les plans diagonaux sont séparés, et coupent les faces primitives. Or les prismes de ce second groupe, plus compli-

qué, sont traitables, tandis que ceux du premier, plus simple, ne le sont pas.

Fig. 25.



Cette figure indique les bases des quatre prismes, dans le cas particulier où $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

§ CXXX.

NOUVEAUX TERMES SIMPLES.

Pour faciliter la formation des séries exprimant le refroidissement des deux prismes conjugués $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, nous prendrons la fonction V, intégrale de l'équation générale (1), § CXIV, sous la forme

$$(17) \qquad V = \sum\sum M u Z e^{-\left[\tau^2 + \left(\frac{i''\pi}{n''}\right)^2\right]\frac{t}{k}}$$

dans laquelle le facteur Z en z' représente

$$(18) \qquad Z = \sin i''\pi \frac{z'}{n''C}.$$

La vérification de l'équation générale, pour chaque terme simple, exigera que le facteur u en (x', y'), soit lié à la constante τ^2 par l'équation

$$(19) \qquad A^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2 u}{dy'^2} + \tau^2 u = 0.$$

La fonction V (17) s'évanouit déjà, par le facteur Z, sur les deux bases ($z' = 0$, $z' = n''C$); pour qu'elle soit pareillement nulle sur les faces latérales de $\mathfrak{P}_1$ ou de $\mathfrak{P}_2$, il faut et il suffit que le facteur u s'annule sur le périmètre de la base de l'un ou de l'autre de ces deux prismes, c'est-à-dire sur les quatre droites représentées par les équations de la première ou de la seconde ligne (16).

Outre (i, i'), qui sont des entiers quelconques, introduisons une autre espèce de nombres $\left(j = i + \frac{1}{2}, j' = i' + \frac{1}{2}\right)$, que l'on peut appeler des *moitiés d'impairs;* c'est-à-dire que, (i, i') étant des racines différentes de l'équation $\sin i\pi = 0$, (j, j') seront pareillement des racines différentes de l'équation $\cos j\pi = 0$. Enfin, représentons par $(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}''_1, \mathfrak{P}'_2, \mathfrak{P}''_2)$, les premiers membres des quatre équations multiples du groupe (16), qui prendra la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 \left\{ \mathfrak{P}'_1 = \pm 1, \quad \mathfrak{P}''_1 = \pm 1; \right. \\ \mathfrak{P}_2 \left\{ \mathfrak{P}'_2 = \pm 1, \quad \mathfrak{P}''_2 = \pm 1. \right. \end{cases}$$

Toutes ces préparations faites, le facteur u s'annulera évidemment, sur le périmètre de la base de $\mathfrak{P}_1$, s'il peut être égalé à l'un des produits trigonométriques

$$(21) \qquad \begin{cases} u'_1 = 2\cos j\pi \mathfrak{P}'_1 \cos j'\pi \mathfrak{P}''_1, \\ u''_1 = 2\sin i\pi \mathfrak{P}'_1 \sin i'\pi \mathfrak{P}''_1, \\ v'_1 = 2\cos j\pi \mathfrak{P}'_1 \sin i\pi \mathfrak{P}''_1, \\ v''_1 = 2\sin i\pi \mathfrak{P}'_1 \cos j\pi \mathfrak{P}''_1, \end{cases}$$

et sur le périmètre de la base de $\mathfrak{P}_2$, s'il peut être égalé à l'un des produits

$$(22) \qquad \begin{cases} u'_2 = 2\cos j\pi \mathfrak{P}'_2 \cos j'\pi \mathfrak{P}''_2, \\ u''_2 = 2\sin i\pi \mathfrak{P}'_2 \sin i'\pi \mathfrak{P}''_2, \\ v'_2 = 2\cos j\pi \mathfrak{P}'_2 \sin i\pi \mathfrak{P}''_2, \\ v''_2 = 2\sin i\pi \mathfrak{P}'_2 \cos j\pi \mathfrak{P}''_2. \end{cases}$$

§ CXXXI.

LEUR VÉRIFICATION.

Mais il faut, en outre, que ces divers produits vérifient chacun l'équation (19) avec une valeur constante de τ^2. Le produit u'_1 (21) est égal à la somme

$$\cos\pi(j\mathfrak{P}'_1 - j'\mathfrak{P}''_1) + \cos\pi(j\mathfrak{P}'_1 + j'\mathfrak{P}''_1)$$

ou, en substituant aux $(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}''_1)$ leurs valeurs (16), à celle-ci

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\left[(j\beta - j'\alpha)\frac{x'}{A} + (j\alpha + j'\beta)\frac{y'}{B}\right]\pi \\ &+\cos\left[(j\beta + j'\alpha)\frac{x'}{A} + (j\alpha - j'\beta)\frac{y'}{B}\right]\pi. \end{aligned}\right.$$

Substituant successivement à u, dans (19), les deux termes de cette somme (23), on trouve pour τ^2 les valeurs

$$[(j\beta - j'\alpha)^2 + (j\alpha + j'\beta)^2]\pi^2, \quad [(j\beta + j'\alpha)^2 + (j\alpha - j'\beta)^2]\pi^2,$$

lesquelles sont égales entre elles et à $(j^2 + j'^2)(\alpha^2 + \beta^2)\pi^2$.

De là résulte que l'on peut adopter pour u les produits (21) et (22), qui vérifient l'équation (19), en prenant pour τ^2 les valeurs respectives

$$\tau^2 = \left\{\begin{aligned} &= (j^2 + j'^2)(\alpha^2 + \beta^2)\pi^2, \\ &= (i^2 + i'^2)(\alpha^2 + \beta^2)\pi^2, \\ &= (j^2 + i^2)(\alpha^2 + \beta^2)\pi^2, \\ &= (i^2 + j^2)(\alpha^2 + \beta^2)\pi^2, \end{aligned}\right.$$

que donnent, de la même manière, les trois autres produits (21), et les quatre (22) : la somme (23) pouvant être une différence de cosinus, une somme ou une différence de sinus, sans rien changer à la conclusion.

Si, voulant traiter les prismes (P_1, P_2), on emploie la

même marche et une notation analogue, le premier produit u'_1 sera

(24) $$2\cos j\pi P'_1 \cos j'\pi P''_1$$

et donnera pour la somme (23)

$$\cos\left[(j-j')\beta\frac{x'}{A}+(j+j')\alpha\frac{y'}{B}\right]\pi$$
$$+\cos\left[(j+j')\beta\frac{x'}{A}+(j-j')\alpha\frac{y'}{B}\right]\pi.$$

Or, en substituant successivement à u, dans (19), les deux termes de cette dernière somme, on trouve pour τ^2 les valeurs

$$[(j-j')^2\beta^2+(j+j')^2\alpha^2]\pi^2,\quad [(j+j')^2\beta^2+(j-j')^2\alpha^2]\pi^2,$$

lesquelles ne sont pas égales, car leur différence, $4jj'(\alpha^2-\beta^2)\pi^2$, n'est pas nulle, puisque α et β sont différents. Ainsi le produit (24), qui s'annule sur le périmètre de la base du prisme P_1, ne peut pas être pris pour un facteur u, puisqu'il ne vérifie pas l'équation (19) avec une valeur constante de τ^2. Le refroidissement des deux prismes P_1 et P_2 ne peut donc pas s'exprimer par des séries trigonométriques et périodiques.

§ CXXXII.

PRISMES AUX FACETTES NON TANGENTES.

Quant aux prismes $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, si l'on pose

(25) . $$\begin{cases}\left[(j^2+j'^2)(\alpha^2+\beta^2)+\left(\dfrac{i''}{n''}\right)^2\right]\pi^2=\theta'^2,\\ \left[(i^2+i'^2)(\alpha^2+\beta^2)+\left(\dfrac{i''}{n''}\right)^2\right]\pi^2=\theta''^2,\\ \left[(i^2+j^2)(\alpha^2+\beta^2)+\left(\dfrac{i''}{n''}\right)^2\right]\pi^2=\tau^2,\end{cases}$$

la loi générale de leur refroidissement par communication sera donnée par les deux séries parallèles

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} V_1 &= \left\{\begin{aligned} &\sum M'_1 u'_1 Z e^{-\theta'^2\frac{t}{k}} + \sum M''_1 u''_1 Z e^{-\theta''^2\frac{t}{k}} \\ &+ \sum (\mathfrak{M}'_1 v'_1 + \mathfrak{M}''_1 v''_1) Z e^{-\tau^2\frac{t}{k}} \end{aligned}\right. \\ V_2 &= \left\{\begin{aligned} &\sum M'_2 u'_2 Z e^{-\theta'^2\frac{t}{k}} + \sum M''_2 u''_2 Z e^{-\theta''^2\frac{t}{k}} \\ &+ \sum (\mathfrak{M}'_2 v'_2 + \mathfrak{M}''_2 v''_2) Z e^{-\tau^2\frac{t}{k}}. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

Le paramètre θ'^2 (25) étant symétrique en (j, j'), et celui θ''^2 en (i, i'), une même exponentielle appartiendra à deux facteurs u différents dans chacune des deux premières parties de V_1 ou de V_2, comme dans la troisième. On pourrait donc établir entre les coefficients du facteur binôme de chaque exponentielle, des rapports tels, que les plans diagonaux de $\mathfrak{P}_1$ ou de $\mathfrak{P}_2$ restent fixés à zéro, soit chacun séparément, soit tous deux à la fois; ce qui conduirait à de nouveaux prismes triangulaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Les deux séries (26) deviennent identiques quand $\alpha = \beta = 1$; elles doivent alors se confondre avec la série générale (26), § CXXII, du prisme tangent, ce que l'on pourrait vérifier.

Mais, ces développements et ces vérifications ne sont pas nécessaires : car, chacun des prismes $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, deviendrait, par un simple changement de coordonnées, un parallélipipède ayant ses arêtes parallèles aux axes; c'est-à-dire si l'on passait du système de diamètres conjugués (A, B, C) de l'ellipsoïde principal à un autre (A′, B′, C). En effet, ajoutant les carrés des équations de la première ligne (16), et ceux des équations de la seconde ligne, on a,

dans les deux cas

$$(\alpha^2 + \beta^2)\left(\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2}\right) = 1;$$

ce qui montre que les huit sommets des bases de $\mathfrak{P}_1$ et de $\mathfrak{P}_2$ sont situés sur une ellipse semblable à celle-ci

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = 1;$$

d'où l'on conclut, facilement, que les côtés de chaque base sont parallèles à un système de diamètres conjugués de cette ellipse.

Lors des solides homogènes non cristallins, ou lors d'un milieu cristallisé ayant pour forme primitive le cube, tous les prismes $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, sont droits, et à base carrée. En effet, les axes sont rectangulaires, on a $A = B = r$, les équations (16) sont

$$\mathfrak{P}_1 \left\{ \beta x + \alpha y = \pm r, \quad \alpha x - \beta y = \pm r; \right.$$
$$\mathfrak{P}_2 \left\{ \beta y + \alpha x = \pm r, \quad \alpha y - \beta x = \pm r; \right.$$

et l'on voit aisément que les côtés de chaque base sont orthogonaux, et que leur unique longueur est

$$\frac{2r}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Des deux leçons précédentes on déduit une conséquence générale, qui les résume en quelque sorte. Les prismes triangulaires, ou les tétraèdres cristallins, équivalents mais de formes distinctes, découpés dans un même parallélipipède obliquangle par des plans diagonaux, et dont le refroidissement par communication s'exprime à l'aide d'une même série périodique, sont tels, que, détachés et isolément

immergés dans un bain à zéro, si leurs points homologues ou primitivement symétriques ont même température initiale, ces points auront encore même température à toute autre époque. En un mot, dans ces circonstances, les polyèdres isolés se refroidiront *parallèlement*. Lors des milieux solides homogènes et non cristallins, ce parallélisme est évident : car les prismes triangulaires isocèles, nés d'un prisme droit à base carrée, ont des formes identiques ; et il en est de même pour chacun des deux groupes de tétraèdres provenant de la subdivision d'un cube.



QUATORZIÈME LEÇON.

PRISMES DES TRONCATURES.

Définition des troncatures; leurs variétés; leurs couples. — Changement de diamètres conjugués. — Transformation du parallélipipède. — Refroidissement par communication des prismes formés par des troncatures sur les sommets.

---

§ CXXXIII.

VARIÉTÉS DES TRONCATURES.

Avant de procéder à de nouvelles recherches, il importe de définir, ici, les facettes secondaires, appelées troncatures en cristallographie, ainsi que leurs diverses variétés, en admettant exclusivement, pour forme primitive, le parallélipipède obliquangle, dont les arêtes (A, B, C), sont parallèles et proportionnelles à des diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal. Toute troncature est due, d'après Haüy, au décroissement de λ fois l'arête A, sur μ fois B, et ν fois C; les (λ, μ, ν) étant des nombres entiers toujours peu considérables. D'après cela, le plan de cette troncature sera représenté par l'équation

$$\frac{x'}{\lambda A} \pm \frac{y'}{\mu B} \pm \frac{z'}{\nu C} = \text{const}.$$

qui, chassant les facteurs (λ, μ, ν) des dénominateurs, et disposant de la grandeur des lignes proportionnelles (A, B, C), peut toujours être amenée à la forme

(1) $$\alpha \frac{x'}{A} + \beta \frac{y'}{B} + \gamma \frac{z'}{C} = \pm 1.$$

Les coefficients α, β, γ, sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, toujours réduits de telle sorte qu'ils ne soient plus divisibles tous trois par un même facteur. Leurs valeurs absolues sont seules nécessaires, pour définir l'espèce de troncature, ou le genre de décroissement qui lui correspond. C'est-à-dire qu'une troncature étant désignée par la parenthèse symbolique (α, β, γ), son espèce reste la même, quels que soient les signes et l'ordre des trois nombres.

Si les carrés de ces nombres sont égaux entre eux et conséquemment à l'unité, la troncature $(1, \pm 1, \pm 1)$, est dite *tangente sur sommet*. On peut appeler *semitangente*, une troncature, comme $(\alpha, \pm \alpha, \gamma)$, telle que deux carrés seulement sont égaux, et *troncatures trinômes*, toutes celles pour lesquelles les trois carrés sont inégaux. Si l'un des trois nombres est zéro, la troncature $(\alpha, \beta, 0)$ par exemple, se confond avec une facette, qu'on peut appeler *troncature sur arête, tangente* si β^2 et α^2 sont l'unité, *binôme* si β^2 diffère de α^2. Enfin, avec deux zéros, le symbole, tel que $(0, 0, \gamma)$, indique une face primitive.

Si l'on mène, par l'origine des coordonnées, des plans parallèles aux troncatures d'une même espèce, il y en aura quatre pour les troncatures tangentes sur sommets, douze pour les semitangentes, vingt-quatre pour les trinômes. Quand il s'agit des troncatures sur arêtes, ou des facettes, le nombre de ces plans est, six pour les facettes tangentes, douze pour les binômes; et le premier terme de ce second groupe est représenté par trois plans parallèles aux faces primitives.

§ CXXXIV.

COUPLES DE TRONCATURES.

Lorsqu'un polyèdre aura deux faces parallèles à l'un des plans énumérés, on pourra dire que sa surface comprend

un *couple* défini par l'épithète caractéristique de ce plan. Ainsi, ce sera : un couple primitif; un couple tangent sur arête, tangent ou semitangent sur sommet; un couple binôme sur arête, trinôme sur sommet. En un mot, à chacun des plans de l'article précédent correspond un couple ayant la même définition que ce plan. Le couple conservant sa nature, quelle que soit la distance des deux plans parallèles qui le composent, on peut dire que tout prisme, formé par trois couples primitifs, *coïncide* avec la forme primitive, quels que soient d'ailleurs les rapports des côtés de ce prisme.

Les huit sommets, ou les huit angles trièdres du parallélipipède primitif, n'en comportent que quatre, qui diffèrent par les angles plans composants : car les deux sommets que réunit une même diagonale intérieure sont identiques, ou homologues. A chacun des quatre sommets distincts correspondent, un seul couple tangent, trois couples pour les troncatures semitangentes, six pour les trinômes.

Si chaque lettre (A, B, C) qui spécifie un des diamètres conjugués, désigne collectivement les quatre arêtes du prisme primitif qui sont parallèles à ce diamètre, alors, à chaque arête collective, et dite primitive, (A, ou B, ou C), correspondent deux couples tangents, et quatre couples pour les troncatures binômes. Mais, en réalité, les quatre arêtes parallèles à A, ou à B, ou à C, en comportent deux qui sont distinctes, par leurs angles dièdres, et par les sommets qu'elles réunissent. Par exemple, si l'on considère une des diagonales intérieures, deux des quatre parallèles la rencontrent, les deux autres ne la rencontrent pas; les premières réunissent des sommets homologues, ainsi que les secondes; et le partage est le même, quelle que soit la diagonale. On peut dire que chacune des trois arêtes primitives a sa *symétrique*, qui lui est parallèle, égale en gran-

deur, mais dont les extrémités diffèrent des siennes, et dont l'angle dièdre est autre. Il existe donc six arêtes distinctes, et à chacune d'elles correspondent un seul couple tangent, et deux couples pour les troncatures binômes.

Chaque couple primitif étant parallèle à deux arêtes primitives, la troisième arête et sa symétrique peuvent être appelées les conjuguées de ce couple. D'après cela, le prisme tangent, du § CXXII, est formé par un couple primitif associé aux deux couples tangents sur ses arêtes conjuguées; les deux prismes $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ de la leçon précédente, qui ont le même couple primitif, se partagent les quatre couples, d'une même troncature binôme, qui correspondent aux arêtes conjuguées de ce couple primitif. De plus, tous ces prismes coïncident, chacun, avec le parallélipipède primitif d'un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, autre que celui des (A, B, C). Cherchons, maintenant, jusqu'à quel point, ces associations, ces partages, et ces coïncidences, s'étendent aux troncatures sur les sommets.

§ CXXXV.

CHANGEMENT DE DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

Avec les coordonnées (x', y', z'), ou les diamètres (A, B, C), la fonction intégrale V, les relations qui régissent le facteur U et la constante θ^2 de chaque terme simple, sont

$$(2)\quad \begin{cases} V = \sum MUe^{-\theta^2 \frac{t}{k}}, \quad U_\sigma = 0, \\ A^2 \dfrac{d^2U}{dx'^2} + B^2 \dfrac{d^2U}{dy'^2} + C^2 \dfrac{d^2U}{dz'^2} + \theta^2 U = 0; \end{cases}$$

et quand il s'agit d'exprimer le refroidissement d'un corps

de forme donnée, découpé dans le milieu cristallin, il faut trouver le facteur général U qui lui correspond.

Cela posé, si le corps est un parallélipipède obliquangle, dont les côtés sont parallèles à d'autres diamètres conjugués $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \Gamma)$ de l'ellipsoïde principal, (X, Y, Z) représentant les coordonnées correspondantes à ces diamètres pris pour axes, on pourra d'abord exprimer U en (X, Y, Z), et le transformer ensuite en (x', y', z'). Soient

$$(3) \qquad X = \pm \mathcal{M}\mathcal{A}, \quad Y = \pm \mathcal{M}'\mathcal{B}, \quad Z = \pm \mathcal{M}''\Gamma,$$

les côtés du parallélipipède; on pourra donner aux rapports $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}'')$ telles grandeurs que l'on voudra, supérieures ou inférieures à l'unité, commensurables ou incommensurables. Introduisons le symbole $\mathcal{L}$. pour désigner l'une ou l'autre des deux lignes trigonométriques, sinus et cosinus, et représentons par l l'un ou l'autre des produits correspondants $i\pi$, et $j\pi$ (j étant une moitié d'impair, § CXXX). Les relations qui régissent la fonction U de (X, Y, Z) et la constante θ^2, étant

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}^2 \dfrac{d^2U}{dX^2} + \mathcal{B}^2 \dfrac{d^2U}{dY^2} + \Gamma^2 \dfrac{d^2U}{dZ^2} + \theta^2 U = 0, \\ U_\sigma = 0, \end{cases}$$

leur vérification est obtenue en prenant

$$(5) \qquad \begin{cases} U = \mathcal{L}\left(l \dfrac{X}{\mathcal{M}\mathcal{A}}\right) \cdot \mathcal{L}'\left(l' \dfrac{Y}{\mathcal{M}'\mathcal{B}}\right) \cdot \mathcal{L}''\left(l'' \dfrac{Z}{\mathcal{M}''\Gamma}\right), \\ \theta^2 = \left(\dfrac{l}{\mathcal{M}}\right)^2 + \left(\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}\right)^2 + \left(\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)^2 : \end{cases}$$

les signes $(\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'')$ remplaçant, chacun, (*sin* ou *cos*), (l, l', l'') étant respectivement ($i\pi$ ou $j\pi$, $i'\pi$ ou $j'\pi$, $i''\pi$ ou $j''\pi$).

Les formules qui lient les (X, Y, Z) aux (x', y', z') peu-

vent être prises sous la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{X}{\mathcal{A}} &= m\,\frac{x'}{A} + n\,\frac{y'}{B} + p\,\frac{z'}{C}, \\ \frac{Y}{\mathcal{B}} &= m'\,\frac{x'}{A} + n'\,\frac{y'}{B} + p'\,\frac{z'}{C}, \\ \frac{Z}{\Gamma} &= m''\,\frac{x'}{A} + n''\,\frac{y'}{B} + p''\,\frac{z'}{C}, \end{aligned}\right.$$

où les neuf constantes doivent être telles que la double équation

$$\left.\begin{aligned} \frac{X^2}{\mathcal{A}^2} + \frac{Y^2}{\mathcal{B}^2} + \frac{Z}{\Gamma^2} &= \\ \frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} + \frac{z'^2}{C^2} &= \end{aligned}\right\} = 1$$

représente le même ellipsoïde. Ce qui établit, entre ces constantes, le groupe de relations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} m^2 + m'^2 + m''^2 &= 1, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &= 1, \\ p^2 + p'^2 + p''^2 &= 1, \\ np + n'p' + n''p'' &= 0, \\ pm + p'm' + p''m'' &= 0, \\ mn + m'n' + m''n'' &= 0, \end{aligned}\right.$$

qui, comme on le sait, peut être remplacé par le groupe inverse

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} m^2 + n^2 + p^2 &= 1, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= 1, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= 1, \\ m'm'' + n'n'' + p'p'' &= 0, \\ m''m + n''n + p''p &= 0, \\ mm' + nn' + pp' &= 0. \end{aligned}\right.$$

§ CXXXVI.

PARALLÉLIPIPÈDE TRANSFORMÉ.

Le facteur U (5) transformé en (x', y', z'), sera donc, d'après les formules (6),

$$(9)\qquad U = \begin{cases} \mathfrak{L}\left[\frac{l}{\mathfrak{N}}\left(m\,\frac{x'}{A} + n\,\frac{y'}{B} + p\,\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times\mathfrak{L}'\left[\frac{l'}{\mathfrak{N}'}\left(m'\,\frac{x'}{A} + n'\,\frac{y'}{B} + p'\,\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times\mathfrak{L}''\left[\frac{l''}{\mathfrak{N}''}\left(m''\,\frac{x'}{A} + n''\,\frac{y'}{B} + p''\,\frac{z'}{C}\right)\right], \end{cases}$$

et ce facteur s'évanouira sur les six plans

$$(10)\qquad \begin{cases} m\,\frac{x'}{A} + n\,\frac{y'}{B} + p\,\frac{z'}{C} = \pm\mathfrak{N}, \\ m'\,\frac{x'}{A} + n'\,\frac{y'}{B} + p'\,\frac{z'}{C} = \pm\mathfrak{N}', \\ m''\,\frac{x'}{A} + n''\,\frac{y'}{B} + p''\,\frac{z'}{C} = \pm\mathfrak{N}''. \end{cases}$$

Avec cette valeur générale (9) du facteur U, la série V (2) exprimera le refroidissement par communication du parallélipipède dont les faces sont représentées par les équations (10), si les constantes $(m, n, p,\ldots)$ vérifient les relations (7) ou (8).

Ces relations donnent à la fonction U (9) la propriété essentielle de vérifier la dernière équation (2), avec la valeur constante (5) de θ^2. En effet, le produit de sinus ou cosinus (9), multiplié par 4, se développe en une somme algébrique de quatre sinus ou cosinus; l'un des termes de

cette somme est

$$\mathcal{L}_1\left(\left\{\begin{array}{l} \quad\left(m\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+m'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+m''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)\dfrac{x'}{\mathrm{A}} \\ +\left(n\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+n'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+n''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)\dfrac{y'}{\mathrm{B}} \\ +\left(p\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+p'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+p''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)\dfrac{z'}{\mathrm{C}} \end{array}\right\}\right);$$

si on le substitue à U dans la dernière équation (2), on a

$$\theta^2=\left\{\begin{array}{l} \quad\left(m\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+m'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+m''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)^2 \\ +\left(n\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+n'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+n''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)^2 \\ +\left(p\,\dfrac{l}{\mathcal{M}}+p'\,\dfrac{l'}{\mathcal{M}'}+p''\,\dfrac{l''}{\mathcal{M}''}\right)^2, \end{array}\right.$$

ou la valeur (5), d'après les relations (8); et l'on reconnaît aisément que les trois autres termes donnent tous la même valeur de θ^2, en ayant égard aux mêmes relations (8).

§ CXXXVII.

TRONCATURES CONJUGUÉES.

Les rapports $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}'')$ étant quelconques, on peut prendre pour les constantes $(m, n, p, \ldots)$ les valeurs

$$(11)\qquad\left\{\begin{array}{lll} m=\alpha\,\mathcal{M}, & n=\beta\,\mathcal{M}, & p=\gamma\,\mathcal{M}; \\ m'=\alpha'\,\mathcal{M}', & n'=\beta'\,\mathcal{M}', & p'=\gamma'\,\mathcal{M}'; \\ m''=\alpha''\,\mathcal{M}'', & n''=\beta''\,\mathcal{M}'', & p''=\gamma''\,\mathcal{M}''; \end{array}\right.$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et qui, étant substituées dans le groupe (8), le trans-

forment ainsi :

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,\mathfrak{N}^2=1,\\ (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\,\mathfrak{N}'^2=1,\\ (\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)\,\mathfrak{N}''^2=1,\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,\\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0. \end{cases}$$

Les trois premières (12) assignent les valeurs actuelles des rapports $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \mathfrak{N}'')$, d'où l'on conclut, pour θ^2 (5)

$$(13)\quad \theta^2=\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,l^2\\ +(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\,l'^2\\ +(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)\,l''^2. \end{cases}$$

Les trois dernières (12) donnent les relations qui doivent exister entre les neuf entiers $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, pour que U (9), qui devient, par les (11),

$$(14)\quad U=\begin{cases} \mathfrak{L}\left[l\left(\alpha\dfrac{x'}{A}+\beta\dfrac{y'}{B}+\gamma\dfrac{z'}{C}\right)\right]\\ \times\mathfrak{L}'\left[l'\left(\alpha'\dfrac{x'}{A}+\beta'\dfrac{y'}{B}+\gamma'\dfrac{z'}{C}\right)\right]\\ \times\mathfrak{L}''\left[l''\left(\alpha''\dfrac{x'}{A}+\beta''\dfrac{y'}{B}+\gamma''\dfrac{z'}{C}\right)\right] \end{cases}$$

vérifie la dernière équation (2) avec θ^2 (13).

Ce nouveau facteur U (14) s'annule sur les plans représentés par les équations

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha\dfrac{x'}{A}+\beta\dfrac{y'}{B}+\gamma\dfrac{z'}{C}=\pm 1,\\ \alpha'\dfrac{x'}{A}+\beta'\dfrac{y'}{B}+\gamma'\dfrac{z'}{C}=\pm 1,\\ \alpha''\dfrac{x'}{A}+\beta''\dfrac{y'}{B}+\gamma''\dfrac{z'}{C}=\pm 1, \end{cases}$$

que l'on obtient en substituant les valeurs (11) dans

les équations (10). Maintenant, les procédés les plus élémentaires de l'analyse indéterminée conduisent à cette conséquence, que l'on peut toujours prendre arbitrairement les trois entiers (α, β, γ), et trouver ensuite six autres entiers $(\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'')$, tels que les trois dernières relations (12) soient satisfaites.

§ CXXXVIII.

PRISMES AUX COUPLES DE TRONCATURES.

Il résulte de là, et des définitions du § CXXXIII, que les équations (15) sont celles de trois couples de troncatures sur sommets, en général différentes, et dont l'association est régie par les trois dernières équations (12), de telle sorte que l'un des couples étant donné, on peut en déduire les deux autres; et les trois couples réunis forment un prisme oblique, qui coïncide avec le parallélipipède primitif d'un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, autre que celui des (A, B, C). Même coïncidence que pour les troncatures sur arêtes, et association analogue.

Ainsi, lorsqu'un milieu cristallisé a pour forme primitive le parallélipipède obliquangle, ou ses variétés, toute facette, toute troncature, des cristaux naturels de cette substance, peut toujours être associée avec deux autres facettes ou troncatures, de manière à former un prisme, dont le refroidissement par communication soit exprimable à l'aide d'une série trigonométrique et périodique.

Pour citer commodément divers exemples de la solution générale qui précède, il suffira de reproduire le tableau

$$(16)\qquad \left\{\begin{matrix} (\alpha, & \beta, & \gamma) \\ (\alpha', & \beta', & \gamma') \\ (\alpha'', & \beta'', & \gamma'') \end{matrix}\right\}$$

avec les nombres particuliers à chacun d'eux, de constater que ces nombres vérifient les relations

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \end{cases}$$

et de les substituer ensuite dans θ^2 (13) et U (14).

On a d'abord, pour premier exemple,

$$(18)\quad \begin{Bmatrix} [\alpha, & \beta, & 0\ ] \\ [\beta, & -\alpha, & 0\ ] \\ \left[0, \right. & 0, & \left.\frac{1}{\mathfrak{K}''}\right] \end{Bmatrix}$$

α et β restant disponibles. On en conclut

$$\theta^2 = (l^2 + l'^2)(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{l''}{\mathfrak{K}''}\right)^2;$$

$$U = \mathcal{L}\left[l\left(\alpha\frac{x'}{A} + \beta\frac{y'}{B}\right)\right] \cdot \mathcal{L}'\left[l'\left(\beta\frac{x'}{A} - \alpha\frac{y'}{B}\right)\right] \cdot \mathcal{L}''\left[l''\frac{z'}{\mathfrak{K}''C}\right].$$

Le prisme est formé par un couple primitif, associé à deux couples d'une même troncature binôme sur ses arêtes conjuguées. Il n'est autre qu'un des prismes $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, du § CXXXII.

§ CXXXIX.

PRISME D'UNE TRONCATURE TANGENTE.

Lorsqu'on cherche quels sont les couples les plus simples, qui puissent être associés à celui d'une troncature tangente sur sommet, on arrive au tableau

$$(19)\quad \begin{Bmatrix} [1, & 1, & 1] \\ [1, & 1, & -2] \\ [1, & -1, & 0] \end{Bmatrix}.$$

c'est-à-dire que les deux couples cherchés sont, celui d'une troncature semitangente sur sommet (qui correspond au décroissement de 2 sur 2 et sur 1), l'autre celui d'une troncature tangente sur arête. On a alors

$$\theta^2 = 3l^2 + 6l'^2 + 2l''^2,$$

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}\left[l\left(\frac{x'}{A} + \frac{y'}{B} + \frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathcal{L}'\left[l'\left(\frac{x'}{A} + \frac{y'}{B} - 2\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathcal{L}''\left[l''\left(\frac{x'}{A} - \frac{y'}{B}\right)\right]. \end{array} \right.$$

On reconnaît facilement qu'un même prisme traitable ne peut pas réunir deux couples de troncatures tangentes sur sommets : car, si la seconde ligne du tableau (19) était (± 1, ± 1, ± 1), la dernière relation (17) ne serait pas satisfaite, quels que fussent d'ailleurs les signes de cette seconde ligne. Ainsi, les quatre couples de troncatures tangentes sur sommets, ne peuvent appartenir qu'à quatre prismes traitables différents.

Par tous les changements de signes admissibles, des neuf termes du tableau (19), la première ligne indique les quatre couples de troncatures qui constituent un octaèdre, la troisième ligne donne des facettes tangentes sur les douze arêtes de ce nouveau polyèdre, et la seconde des troncatures semitangentes sur ses six sommets, figurant des pointements quadruples; par une sorte d'inégalité dans l'étendue des deux plans de chaque couple, la première ligne donne un tétraèdre, avec des troncatures tangentes sur ses quatre sommets, alors la troisième ligne comprend des facettes tangentes sur ses six arêtes, et la seconde des troncatures non tangentes sur ses quatre sommets, figurant des pointements triples. Cet octaèdre, et ce tétraèdre, qui sont réguliers lors de la cristallisation cubique, peuvent être

adoptés comme formes *primitives*, ou plutôt *pseudoprimitives*; et leurs facettes, leurs troncatures, telles qu'elles soient, s'associeront toujours de manière à former des prismes, dont le refroidissement par communication sera exprimable à l'aide d'une série trigonométrique et périodique.

§ CXL.

PRISMES DE TRONCATURES NON TANGENTES.

Si l'on se propose de chercher un prisme traitable, réunissant deux et même trois couples, d'une même espèce de troncatures non tangentes, sur les sommets de notre parallélipipède primitif, on rencontre presque immédiatement le tableau général

$$(20)\qquad \left\{\begin{matrix} [n(n+1), & (n+1), & -n] \\ [(n+1), & -n, & n(n+1)] \\ [-n, & n(n+1), & (n+1)] \end{matrix}\right\},$$

n'employant qu'un seul et même décroissement, celui de 1 sur n et sur $(n+1)$, et qui, en observant que

$$n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2=[n(n+1)+1]^2,$$

donne, pour le paramètre θ^2, la valeur symétrique

$$\theta^2=[n(n+1)+1]^2/(l^2+l'^2+l''^2).$$

Si $n=1$, on a le tableau particulier

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} [\ 2, & 2, & -1] \\ [\ 2, & -1, & 2] \\ [-1, & 2, & 2] \end{matrix}\right\},$$

qui donne, pour θ^2 et U, les valeurs

$$(22)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^2 = 3^2(l^2 + l'^2 + l''^2) \\ U = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}\left[l\left(2\frac{x'}{A} + 2\frac{y'}{B} - \frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathfrak{L}'\left[l'\left(2\frac{x'}{A} - \frac{y'}{B} + 2\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathfrak{L}''\left[l''\left(-\frac{x'}{A} + 2\frac{y'}{B} + 2\frac{z'}{C}\right)\right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

De là résulte que les douze couples de la troncature semi-tangente ($\pm 2, \pm 2, \pm 1$), qui correspond à un décroissement de 1 sur 1 et sur 2, forment quatre prismes traitables, sans le concours d'aucune autre troncature.

Avec $n = 2$, le tableau (20) devient

$$(23)\quad \left\{ \begin{array}{rrr} [\ 6, & 3, & -2] \\ [\ 3, & -2, & 6] \\ [-2, & 6, & 3] \end{array} \right\},$$

et conduit aux nouvelles valeurs

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^2 = 7^2(l^2 + l'^2 + l''^2), \\ U = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}\left[l\left(6\frac{x'}{A} + 3\frac{y'}{B} - 2\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathfrak{L}'\left[l'\left(3\frac{x'}{A} - 2\frac{y'}{B} + 6\frac{z'}{C}\right)\right] \\ \times \mathfrak{L}''\left[l''\left(-2\frac{x'}{A} + 6\frac{y'}{B} + 3\frac{z'}{C}\right)\right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

De là résulte que les vingt-quatre couples de la troncature trinôme ($\pm 6, \pm 3, \pm 2$), qui correspond au décroissement de 1 sur 2 et sur 3, formeront huit prismes traitables, sans l'intervention d'aucune troncature étrangère.

Ces deux exemples particuliers sont d'une simplicité remarquable, et qui explique, en quelque sorte, la coïnci-

dence suivante : Lorsque le parallélipipède obliquangle primitif est un rhomboèdre, les prismes traitables à l'aide des facteurs U (22) et (24), où C = B = A, sont deux rhomboèdres secondaires, provenant de troncatures symétriques sur les six sommets non équiangles du rhomboèdre primitif, et qui se rencontrent fréquemment parmi les cristaux naturels.

§ CXLI.

INTRODUCTION D'UNE TRONCATURE DONNÉE.

Généralement, si l'on veut introduire, dans le groupe (16), une troncature trinôme donnée (α, β, γ), posant

$$\alpha + \beta + \gamma = S_1, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = S_2,$$

on reconnait facilement que le tableau général

$$(25) \qquad \left\{\begin{matrix} [\alpha, & \beta, & \gamma] \\ [(\beta - \gamma), & (\gamma - \alpha), & (\alpha - \beta)] \\ [(S_2 - \alpha S_1), & (S_2 - \beta S_1), & (S_2 - \gamma S_1)] \end{matrix}\right\}$$

vérifie les équations (17) ; il donnera donc immédiatement des couples associés. Par exemple, si les entiers différents sont les trois premiers nombres après zéro, on a le tableau particulier

$$(26) \qquad \left\{\begin{matrix} [\ 3, & 2, & 1] \\ [\ 1, & -2, & 1] \\ [-2, & 1, & 4] \end{matrix}\right\}$$

la seconde troncature est semitangente (et de même espèce que la seconde du groupe (19)) ; la troisième (26) est trinôme, mais autre que la première.

Deux couples de troncatures trinômes de même espèce peuvent être associés quand le carré d'un des entiers α, β,

γ, est égal à la somme des carrés des deux autres. En effet, avec

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2,$$

on compose le tableau général

$$(27)\qquad \left\{\begin{matrix} [\alpha, & \beta, & \gamma] \\ [\alpha, & \beta, & -\gamma] \\ [\beta, & -\alpha, & 0] \end{matrix}\right\}$$

et le troisième couple est celui d'une troncature binôme sur arête. Par exemple, avec les entiers 3, 4, 5, on a particulièrement

$$(28)\qquad \left\{\begin{matrix} [3, & 4, & 5] \\ [3, & 4, & -5] \\ [4, & -3, & 0] \end{matrix}\right\}$$

Les mêmes entiers introduits au tableau (25) donnent celui-ci

$$(29)\qquad \left\{\begin{matrix} [\ 3, & 4, & 5] \\ [-1, & 2, & -1] \\ [\ 7, & 1, & -5] \end{matrix}\right\}$$

où la troncature trinôme [3, 4, 5] est associée à deux troncatures, l'une semitangente (encore la même qu'aux groupes (19) et (26)), l'autre trinôme et différant de la première.

Mais, ici, les entiers paraissent dépasser les limites assignées par Haüy. C'est ce qui aurait encore lieu pour une multitude d'autres exemples, que nous devons conséquemment passer sous silence, quelque intéressants qu'ils pussent être, au point de vue de la théorie des nombres, ou de l'analyse indéterminée. Ceux qui précèdent suffisent, d'ailleurs, pour montrer qu'une même troncature peut intervenir dans plusieurs groupes, ou donner des couples appartenant à plusieurs prismes traitables différents.

§ CXLII.

GÉNÉRALISATION DES SÉRIES.

Les valeurs posées (11) peuvent être généralisées, en leur donnant des dénominateurs (D, D′, D″) : chaque ligne ayant le sien. Alors, les trois premières relations (12) auront respectivement pour seconds membres (D^2, D'^2, D''^2) au lieu de l'unité; mais les trois dernières (12) resteront les mêmes. La valeur de θ^2 sera

$$(30)\qquad \theta^2 = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left(\dfrac{l}{D}\right)^2 \\ +(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\left(\dfrac{l'}{D'}\right)^2 \\ +(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)\left(\dfrac{l''}{D''}\right)^2. \end{array} \right.$$

Le facteur U aura la nouvelle forme

$$(31)\qquad U = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}\left[\dfrac{l}{D}\left(\alpha\dfrac{x'}{A}+\beta\dfrac{y'}{B}+\gamma\dfrac{z'}{C}\right)\right] \\ \times\mathcal{L}'\left[\dfrac{l'}{D'}\left(\alpha'\dfrac{x'}{A}+\beta'\dfrac{y'}{B}+\gamma'\dfrac{z'}{C}\right)\right] \\ \times\mathcal{L}''\left[\dfrac{l''}{D''}\left(\alpha''\dfrac{x'}{A}+\beta''\dfrac{y'}{B}+\gamma''\dfrac{z'}{C}\right)\right] \end{array} \right.$$

et s'évanouira sur les six plans représentés par les équations

$$(32)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha\dfrac{x'}{A}+\beta\dfrac{y'}{B}+\gamma\dfrac{z'}{C} = \pm D, \\ \alpha'\dfrac{x'}{A}+\beta'\dfrac{y'}{B}+\gamma'\dfrac{z'}{C} = \pm D', \\ \alpha''\dfrac{x'}{A}+\beta''\dfrac{y'}{B}+\gamma''\dfrac{z'}{C} = \pm D''. \end{array} \right.$$

Enfin, la série V (2), composée avec le facteur U (31) et le paramètre θ^2 (30), exprimera le refroidissement, par communication, de tout prisme formé par les trois troncatures conjuguées (16), quels que soient les rapports des côtés de ce prisme, ou ceux des nombres (D, D', D''). Cette généralisation s'étend évidemment à tous les exemples cités, même au groupe (18), et conséquemment au prisme tangent du § CXXII, et aux prismes $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ du § CXXXII.

QUINZIÈME LEÇON.

PRISMES TRIANGULAIRES PSEUDORÉGULIERS.

Application, aux milieux cristallins, des séries du prisme triangulaire régulier. — Prisme oblique primitif à base losange. — Ses prismes secondaires pseudoréguliers. — Conditions, variabilité, et construction graphique des triangles pseudoréguliers.

---

§ CXLIII.

PRISMES RÉGULIERS DÉDUITS DU RHOMBOÈDRE.

Les leçons précédentes ont étendu, aux milieux cristallins, le premier des deux groupes de séries, définis au § XCIV. Il s'agit, dans la leçon actuelle, d'appliquer, aux mêmes milieux, le second de ces groupes.

D'après le § XXX, lorsque la forme primitive est un rhomboèdre, l'équation générale en V, rapportée aux axes de l'ellipsoïde principal, est

$$a^2\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)+c^2\frac{d^2V}{dz^2}=k\frac{dV}{dt},$$

les z étant parallèles à la diagonale qui joint les deux sommets équiangles du rhomboèdre primitif. La fonction intégrale V peut être prise sous la forme

$$(1)\qquad V=\mathrm{S}\, u\sin i\pi\frac{z}{h}e^{-\theta^2\frac{t}{k}}$$

la constante de l'exponentielle, étant ainsi composée

$$\Theta^2 = a^2\theta^2 + c^2\left(\frac{i\pi}{h}\right)^2$$

et le facteur u, fonction de (x, y), vérifiant l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \theta^2 u = 0.$$

Avec i nombre entier, la série (1) exprimera le refroidissement par communication d'un prisme de hauteur h, si le facteur u s'annule sur le périmètre de sa base.

Or on peut adopter, pour u, les diverses valeurs trouvées dans les IXe, X^e, XIe leçons. Donc, lorsque la forme primitive du milieu cristallin est le rhomboèdre, on peut exprimer, par des séries trigonométriques et périodiques, le refroidissement par communication de tout prisme droit, dont l'axe est parallèle à la diagonale principale du rhomboèdre, et qui a pour base, soit un triangle équilatéral, soit sa moitié, soit même un hexagone régulier.

§ CXLIV.

PRISME OBLIQUE A BASE LOSANGE.

Lorsque la forme primitive est un prisme à base losange, symétrique ou non, l'équation générale V, rapportée aux arêtes de ce polyèdre, est

$$A^2\left(\frac{d^2V}{dx'^2} + \frac{d^2V}{dy'^2}\right) + C^2\frac{d^2V}{dz'^2} = k\,\frac{dV}{dt},$$

les (x', y') étant parallèles aux côtés du losange. La fonction intégrale V peut être prise sous la forme

$$(2) \qquad V = \mathrm{S}\, u' \sin i\pi\,\frac{z'}{h'}\,e^{-\Theta^2\frac{t}{k}},$$

la constante de l'exponentielle étant ainsi composée,

$$\Theta^2 = A^2\theta^2 + C^2\left(\frac{i\pi}{h'}\right)^2$$

et le facteur u', fonction de (x', y'), vérifiant l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2u'}{dx'^2} + \frac{d^2u'}{dy'^2} + \theta^2 u' = 0.$$

Avec i nombre entier, la série V (2) exprimera le refroidissement, par communication, d'un prisme oblique, compris entre les plans $(z' = 0,\ z' = h')$, si le facteur u' s'annule sur le périmètre de sa base.

Ici, les coordonnées (x', y') sont obliques, et il s'agit de chercher, pour quelle base triangulaire, le facteur u' s'exprimera de la même manière que pour le triangle équilatéral lors des coordonnées rectangulaires. Nous appelons *pseudorégulier* tout triangle satisfaisant à cette coïncidence, et nous désignons par la même épithète le prisme correspondant, pour le distinguer des prismes triangulaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de la XII[e] leçon, dont le refroidissement s'exprime par des séries d'une origine différente.

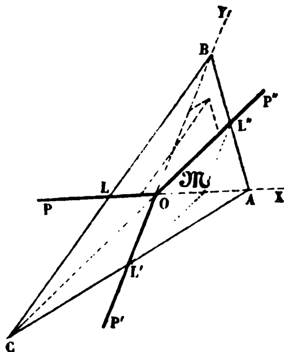
§ CXLV.

NOUVELLES COORDONNÉES P(i).

Soient ABC le triangle cherché, O son centre de gravité, $(3l,\ 3l',\ 3l'')$ les longueurs de ses trois médianes, $(\overline{OP},\ \overline{OP'},\ \overline{OP''})$ leurs directions prises pour axes. Les parallèles aux trois côtés menées par un point intérieur, déterminent sur ces trois axes, des intersections dont les distances à l'origine O sont désignées par $(P,\ P',\ P'')$. Ces coordonnées particulières, positives vers les côtés, né-

gatives vers les sommets, sont liées entre elles par une équation facile à trouver : car, si l'on prend les lignes $\overline{OA}$,

Fig. 26.



$\overline{OB}$, pour axes d'un système de coordonnées obliques (X, Y), on obtient sans peine pour les équations des parallèles aux trois cotés

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{X}{l}+\frac{Y}{2l'}&=\frac{P}{l},\\ \frac{X}{2l}-\frac{Y}{l'}&=\frac{P'}{l'},\\ \frac{X}{2l}+\frac{Y}{2l'}&=\frac{P''}{l''};\end{aligned}\right.$$

d'où résulte par addition,

$$(5)\quad \frac{P}{l}+\frac{P'}{l'}+\frac{P''}{l''}=0.$$

Soient désignés, par φ l'angle $\overline{AOB}$, par ε l'angle des axes (x', y'), par β l'angle compris entre $\overline{OA}$ et $\overline{OX'}$, on en déduit les formules de transformation

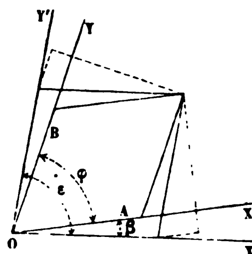
$$X\sin\varphi = x'\sin(\varphi+\beta) - y'\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)],$$
$$Y\sin\varphi = y'\sin(\varepsilon-\beta) - x'\sin\beta;$$

et l'élimination des (X, Y) donne au groupe (4) la forme suivante

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{-\dfrac{\sin(\varphi+\beta)}{l}-\dfrac{\sin\beta}{2l'}}{\sin\varphi}\,x' + \frac{\dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)}{2l'}+\dfrac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{l}}{\sin\varphi}\,y' \\
&\qquad = \frac{P}{l} = mx' + ny',\\
&\frac{\dfrac{\sin(\varphi+\beta)}{2l}+\dfrac{\sin\beta}{l'}}{\sin\varphi}\,x' + \frac{-\dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)}{l'}-\dfrac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{2l}}{\sin\varphi}\,y' \\
&\qquad = \frac{P'}{l'} = m'x' + n'y',\\
&\frac{\dfrac{\sin(\varphi+\beta)}{2l}-\dfrac{\sin\beta}{2l'}}{\sin\varphi}\,x' + \frac{\dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)}{2l'}-\dfrac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{2l}}{\sin\varphi}\,y' \\
&\qquad = \frac{P''}{l''} = m''x' + n''y';
\end{aligned}
\right.
$$

les $(m^{(j)}, n^{(j)})$ désignant, pour simplifier, les coefficients de (x', y') dans ces trois équations.

Fig. 27.



§ CXLVI.

FACTEURS u' DES PRISMES PSEUDORÉGULIERS.

Cela posé, avec le système des coordonnées $P^{(i)}$, les

équations des trois côtés, du triangle ABC, sont

$$(7)\qquad P = l,\quad P' = l',\quad P'' = l''.$$

Or, si, (λ, μ, ν) étant des nombres entiers, positifs ou négatifs, liés entre eux par l'équation

$$(8)\qquad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

on prend les six arcs polynômes différents

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{2\pi}{9}\left(\lambda\frac{P}{l} + \mu\frac{P'}{l'} + \nu\frac{P''}{l''} + 3\lambda\right) &= A_1,\\
\frac{2\pi}{9}\left(\mu\frac{P}{l} + \nu\frac{P'}{l'} + \lambda\frac{P''}{l''} + 3\mu\right) &= A_2,\\
\frac{2\pi}{9}\left(\nu\frac{P}{l} + \lambda\frac{P'}{l'} + \mu\frac{P''}{l''} + 3\nu\right) &= A_3,\\
\frac{2\pi}{9}\left(\nu\frac{P}{l} + \mu\frac{P'}{l'} + \lambda\frac{P''}{l''} + 3\nu\right) &= A'_1,\\
\frac{2\pi}{9}\left(\mu\frac{P}{l} + \lambda\frac{P'}{l'} + \nu\frac{P''}{l''} + 3\mu\right) &= A'_2,\\
\frac{2\pi}{9}\left(\lambda\frac{P}{l} + \nu\frac{P'}{l'} + \mu\frac{P''}{l''} + 3\lambda\right) &= A'_3,
\end{aligned}\right.$$

et que, désignant les cosinus et sinus de ces arcs par les lettres c et s affectées des mêmes indices et accents que A, on compose les deux fonctions

$$(10)\qquad u_1 = \left\{\begin{aligned} &c_1 - c'_1\\ &+ c_2 - c'_2\\ &+ c_3 - c'_3,\end{aligned}\right. \qquad u_2 = \left\{\begin{aligned} &s_1 + s'_1\\ &+ s_2 + s'_2\\ &+ s_3 + s'_3,\end{aligned}\right.$$

on démontrera, comme au § XC, à l'aide des relations (5) et (8), que u_1 et u_2 (10) s'évanouissent sur les trois côtés (7) du triangle ABC.

Mais ces facteurs (10) ne peuvent être pris pour u', que s'ils vérifient l'équation (3) avec une valeur constante de θ^2. Et la recherche actuelle se réduit à reconnaître, comme

nous allons le faire, les conditions nécessaires pour cette vérification : car, ces conditions étant satisfaites, tous les développements des IXe, X^e^, XIe leçons s'appliqueront directement aux facteurs (10), composés avec les arcs polynômes (9), comme les facteurs (22) du § LXXXVIII le sont avec les arcs (21) du même paragraphe; en observant que les nouvelles coordonnées (P, P′, P″) vérifient maintenant l'équation (5), au lieu de celle (12) du § LXXXVI; et que les trois côtés du triangle ABC sont actuellement représentés par les équations (7). En un mot, il suffira de remplacer les fractions de même dénominateur $\left(\frac{P}{r}, \frac{P'}{r}, \frac{P''}{r}\right)$, par celles aux dénominateurs différents $\left(\frac{P}{l}, \frac{P'}{l'}, \frac{P''}{l''}\right)$.

§ CXLVII.

CONDITIONS D'UN TRIANGLE PSEUDORÉGULIER.

Substituant, dans le premier arc (9), aux rapports $\left(\frac{P}{l}, \frac{P'}{l'}, \frac{P''}{l''}\right)$ leurs valeurs (6) en $[m^{(j)}, n^{(j)}]$, et prenant pour u' le cosinus c_1 ou le sinus s_1, la vérification de l'équation (3) exige que

$$(11)\quad \theta^2 = \left(\frac{2\pi}{9}\right)^2 [(\lambda m + \mu m' + \nu m'')^2 + (\lambda n + \mu n' + \nu n'')^2];$$

et pour que cette valeur de θ^2 reste la même, quand on partira de tout autre des arcs (9), il faut, essentiellement, que les $[m^{(j)}, n^{(j)}]$ satisfassent aux identités

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 + n^2 = m'^2 + n'^2 = m''^2 + n''^2, \\ m'm'' + n'n'' = m''m + n''n = mm' + nn'. \end{array} \right.$$

Soit désignée par $\frac{1}{\rho^2}$ la valeur commune des trois mem-

bres de la première (12), on pourra prendre

$$(13)\quad \begin{cases} m=\dfrac{\cos\psi}{\rho}, & m'=\dfrac{\cos\psi'}{\rho}, & m''=\dfrac{\cos\psi''}{\rho}, \\ n=\dfrac{\sin\psi}{\rho}, & n'=\dfrac{\sin\psi'}{\rho}, & n''=\dfrac{\sin\psi''}{\rho}, \end{cases}$$

et, les angles (ψ, ψ', ψ'') étant quelconques, cette première identité (12) sera vérifiée. Mais la seconde devenant, par les valeurs (13),

$$(14)\qquad \cos(\psi''-\psi')=\cos(\psi-\psi'')=\cos(\psi'-\psi),$$

il faudra que les angles (ψ, ψ', ψ'') soient tels que

$$(15)\quad \psi''-\psi'=\delta, \quad \psi-\psi''=\delta+2j\pi, \quad \psi'-\psi=\delta+2j'\pi;$$

relations où, δ étant moindre que 2π, j et j' sont des nombres entiers arbitraires, positifs ou négatifs. Or, si l'on ajoute ces trois relations (15), la somme des premiers membres étant zéro, il faut que $[3\delta+2(j+j')\pi]$ soit pareillement nul; d'où résulte, avec $j=0$ et $j'=-1$, pour δ la valeur essentielle

$$(16)\qquad \delta=\frac{2\pi}{3}.$$

Ce qui donne aux trois membres du groupe (14) la valeur commune $\left(-\frac{1}{2}\right)$; et, l'angle ψ'' restant indéterminé, on aura

$$(17)\qquad \psi=\psi''+\frac{2\pi}{3}, \quad \psi'=\psi''-\frac{2\pi}{3}.$$

Les identités (12) étant ainsi satisfaites, la valeur con-

stante (11) deviendra successivement

$$(18)\quad \theta^2 = \begin{cases} = \left(\dfrac{2\pi}{9\rho}\right)^2 [(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)], \\ = \dfrac{2\pi^2}{27\rho^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = \dfrac{4\pi^2}{27\rho^2}(\mu^2+\mu\nu+\nu^2) \end{cases}$$

par des éliminations faites à l'aide de l'équation (8).

Puisque l'arc $\frac{2\pi}{3}$ a pour cosinus $-\frac{1}{2}$, et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, les angles (17), substitués dans les (13), donnent les relations

$$m = -\frac{1}{2}m'' - \frac{\sqrt{3}}{2}n'', \qquad n = -\frac{1}{2}n'' + \frac{\sqrt{3}}{2}m'',$$

$$m' = -\frac{1}{2}m'' + \frac{\sqrt{3}}{2}n'', \qquad n' = -\frac{1}{2}n'' - \frac{\sqrt{3}}{2}m'',$$

desquelles on déduit, par addition et soustraction, les suivantes, qui peuvent les remplacer :

$$(19)\quad \begin{cases} m+m'+m''=0, & n+n'+n''=0, \\ m'-m=n''\sqrt{3}, & n-n'=m''\sqrt{3}. \end{cases}$$

Par la substitution des valeurs (6) des $(m^{(i)}, n^{(i)})$, les deux premières (19) sont identiques [ce qui devait être d'après l'équation (5)], et les deux dernières deviennent

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sin(\varphi+\beta)}{l} + \frac{\sin\beta}{l'}\right) = \frac{\sin(\varepsilon-\beta)}{l'} - \frac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{l},$$

$$\frac{\sin(\varphi+\beta)}{l} - \frac{\sin\beta}{l'} = \sqrt{3}\left(\frac{\sin(\varepsilon-\beta)}{l'} + \frac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{l}\right).$$

Si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par les facteurs, ($\sqrt{3}$ et $+1$) une première fois, (-1 et $\sqrt{3}$) une

seconde, on a les équations de condition définitives

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sin(\varphi+\beta)}{l} &= \frac{\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta)-\sin\beta}{2l'} \\ \frac{\sin[\varepsilon-(\varphi+\beta)]}{l} &= -\frac{\sin(\varepsilon-\beta)+\sqrt{3}\sin\beta}{2l'}, \end{aligned}\right.$$

qui déterminent la forme du triangle cherché ABC, pour chaque valeur de β, ou pour chaque orientation de $\overline{OA}$, en donnant, ainsi qu'il suit, l'angle φ compris entre les deux médianes $(\overline{OA}, \overline{OB})$, et le rapport $\frac{l'}{l}$ de leurs longueurs.

§ CXLVIII.

ANGLE ET RAPPORT DE DEUX MÉDIANES.

Par le développement des premiers membres, et le changement des signes de la seconde, les équations (20) s'écrivent ainsi

$$\frac{\cos\beta\sin\varphi+\sin\beta\cos\varphi}{l} = \frac{\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta)-\sin\beta}{2l'},$$

$$\frac{\cos(\varepsilon-\beta)\sin\varphi-\sin(\varepsilon-\beta)\cos\varphi}{l} = \frac{\sin(\varepsilon-\beta)+\sqrt{3}\sin\beta}{2l'};$$

alors, isolant successivement $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, on a

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\varepsilon\,\frac{\sin\varphi}{l} = \frac{\sqrt{3}[\sin^2(\varepsilon-\beta)+\sin^2\beta]}{2l'}, \\ &\sin\varepsilon\,.\,\frac{\cos\varphi}{l} = \\ &\frac{\sqrt{3}[\sin(\varepsilon-\beta)\cos(\varepsilon-\beta)-\sin\beta\cos\beta]-\sin\varepsilon}{2l'}; \end{aligned}\right.$$

et, reconnaissant les identités trigonométriques

$$(22)\begin{cases} \sin^2(\varepsilon-\beta)+\sin^2\beta = 1-\cos\varepsilon\cos(\varepsilon-2\beta), \\ \sin(\varepsilon-\beta)\cos(\varepsilon-\beta)-\sin\beta\cos\beta = \cos\varepsilon\sin(\varepsilon-2\beta), \end{cases}$$

on déduit des (21), par l'élimination du rapport $\frac{l}{l'}$, la valeur importante

$$(23)\qquad \tang\varphi = \frac{\sqrt{3}[1-\cos\varepsilon\cos(\varepsilon-2\beta)]}{\sqrt{3}\cos\varepsilon\sin(\varepsilon-2\beta)-\sin\varepsilon},$$

et, par l'élimination de φ, l'équation

$$\frac{l'^2}{l^2} = \frac{3[1-\cos\varepsilon\cos(\varepsilon-2\beta)]^2+[\sqrt{3}\cos\varepsilon\sin(\varepsilon-2\beta)-\sin\varepsilon]^2}{4\sin^2\varepsilon},$$

qui, après avoir chassé les dénominateurs, développé et réduit le second membre, fait passer dans le premier le seul terme au facteur $\sqrt{3}$, puis divisé par 2, prend la forme

$$(24)\qquad \begin{cases} [2l'^2\sin\varepsilon + l^2\sqrt{3}\cos\varepsilon\sin(\varepsilon-2\beta)]\sin\varepsilon \\ = l^2[2+\cos^2\varepsilon - 3\cos\varepsilon\cos(\varepsilon-2\beta)]. \end{cases}$$

§ CXLIX.

RELATIONS ENTRE LES TROIS MÉDIANES.

La figure 26, page 268, montre que la parallèle à $\overline{OP'}$ menée par le milieu L″ de $\overline{AB}$, où $P'' = l''$, et la parallèle à $\overline{OP''}$ menée par le milieu L′ de $\overline{AC}$, où $P' = l'$, aboutissent et se rencontrent au milieu $\mathfrak{M}$ de $\overline{AO}$, où $P = -l$. Le triangle $L'\mathfrak{M}O$, moitié du parallélogramme $L'\mathfrak{M}L''O$, a donc ses trois côtés égaux à (l, l', l''); et, puisque l'angle en O, opposé à l'', est le supplément de φ, il en résulte

$$(25)\qquad 2ll'\cos\varphi + l^2 = l''^2 - l'^2.$$

Or, la seconde (21), multipliée par $2l'l^2$, se met sous la nouvelle forme

$$(2ll'\cos\varphi + l^2)\sin\varepsilon = l^2\sqrt{3}\cos\varepsilon\sin(\varepsilon - 2\beta)$$

[d'après la seconde identité (22)], et, en y substituant à la parenthèse sa valeur (25), on a la première relation

$$(26)\quad \begin{cases} (l''^2 - l'^2)\sin\varepsilon = l^2\sqrt{3}\cos\varepsilon\sin(\varepsilon - 2\beta), \\ (l''^2 + l'^2)\sin^2\varepsilon = l^2[2 + \cos^2\varepsilon - 3\cos\varepsilon\cos(\varepsilon - 2\beta)], \end{cases}$$

laquelle donne la seconde en éliminant de l'équation (24) le terme au facteur $\sqrt{3}$.

A l'aide de l, seule ligne arbitraire, les deux relations (26) donneront l' et l'', et par suite les trois côtés : car, d'après un théorème connu, le triangle BOC donne $\overline{2BL}^2 + 2l^2 = 4l'^2 + 4l''^2$, d'où résulte la première du groupe symétrique

$$\begin{cases} \overline{BC}^2 = 4[2(l'^2 + l''^2) - l^2], \\ \overline{CA}^2 = 4[2(l''^2 + l^2) - l'^2], \\ \overline{AB}^2 = 4[2(l^2 + l'^2) - l''^2]. \end{cases}$$

Il reste à trouver la grandeur de la ligne ρ, qui entre au dénominateur de θ^2 (18). Par les équations de condition (20), les (m, n) (6) se réduisent à

$$m = -\frac{\sqrt{3}\sin(\varepsilon - \beta)}{2l'\sin\varphi}, \quad n = -\frac{\sqrt{3}\sin\beta}{2l'\sin\varphi};$$

d'où résulte, puisque $\frac{1}{\rho^2}$ est la valeur commune des trois membres de la première (13),

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{3[\sin^2(\varepsilon - \beta) + \sin^2\beta]}{4l'^2\sin^2\varphi};$$

ce qui donne, d'après l'équation (21) en $\sin\varphi$, et la première identité (22),

$$\rho^2 \sin^2\varepsilon = l^2[1 - \cos\varepsilon \cos(\varepsilon - 2\beta)].$$

Alors, remarquant que la seconde équation (26) peut s'écrire ainsi

$$(l^2 + l'^2 + l''^2)\sin^2\varepsilon = 3l^2[1 - \cos\varepsilon\cos(\varepsilon - 2\beta)],$$

on obtient définitivement l'expression

$$(27) \qquad \rho^2 = \frac{l^2 + l'^2 + l''^2}{3}.$$

Avant de passer à la discussion de toutes ces valeurs, établissons une dernière formule. Les relations (26) étant prises sous la forme

$$(l''^2 - l'^2)\sqrt{3}\sin\varepsilon = 3l^2\cos\varepsilon\sin(\varepsilon - 2\beta),$$
$$3l^2 - (l^2 + l'^2 + l''^2)\sin^2\varepsilon = 3l^2\cos\varepsilon\cos(\varepsilon - 2\beta),$$

on élimine l'angle β en faisant la somme de leurs carrés, ce qui donne d'abord

$$[3l^2 - (l^2 + l'^2 + l''^2)\sin^2\varepsilon]^2 + 3(l''^2 - l'^2)^2\sin^2\varepsilon - 9l^4\cos^2\varepsilon = 0,$$

puis, développant le premier terme, remplaçant le coefficient total de $9l^4$ par $\sin^2\varepsilon$, facteur devenu commun, que l'on supprime,

$$9l^4 - 6l^2(l^2 + l'^2 + l''^2) + (l^2 + l'^2 + l''^2)^2\sin^2\varepsilon + (3l''^2 - l'^2)^2 = 0,$$

enfin, réunissant et réduisant,

$$(28) \quad [2l^2 - (l'^2 + l''^2)]^2 + 3(l''^2 - l'^2)^2 = (l^2 + l'^2 + l''^2)^2\cos^2\varepsilon,$$

équation remarquable, dont le développement

$$4[(l^4 + l'^4 + l''^4) - (l'^2l''^2 + l''^2l^2 + l^2l'^2)] = (l^2 + l'^2 + l''^2)^2\cos^2\varepsilon,$$

est symétrique en (l, l', l''), comme cela devait être, et

qui régit les trois médianes du triangle cherché, quelle que soit son orientation.

§ CL.

VARIABILITÉ DU TRIANGLE PSEUDORÉGULIER.

Lorsque la base losange est un carré, ou que, l'angle ε étant droit, son sinus est l'unité et son cosinus zéro, l'équation (23) donne $\tang\varphi = -\sqrt{3}$, ou $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, et les deux relations (26), ou la seule (28), conduisent à $l'' = l' = l$. C'est-à-dire que le triangle $\overline{ABC}$ est équilatéral, quel que soit β. Ainsi quand la forme primitive du milieu cristallin est un prisme oblique à base carrée, on peut exprimer par des séries trigonométriques et périodiques, le refroidissement par communication d'un prisme, de même obliquité, ayant pour base un triangle équilatéral, et cela, quelle que soit l'orientation de ce triangle. Mais, lorsque l'angle ε du losange n'est pas droit, il résulte de l'équation (23), et des relations (26), que la base triangulaire du prisme oblique, pareillement traitable, dépend de β, ou qu'elle change de forme avec son orientation.

D'après la première équation (26), les deux lignes (l', l'') ne peuvent être égales entre elles, que pour les valeurs de β qui annulent $\sin(\varepsilon - 2\beta)$, lesquelles sont $\beta = \frac{\varepsilon}{2}$, et $\beta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2}$. La médiane $\overline{OA}$ est alors dirigée, soit suivant la diagonale du losange menée par l'origine O, soit perpendiculairement à cette direction, ou parallèlement à la seconde diagonale. Avec $l'' = l'$, la seconde équation (26) donne

$$\text{quand } \beta = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad l^2 = \left(1 + \frac{3\cos\varepsilon}{2 - \cos\varepsilon}\right) l'^2,$$

$$\text{quand } \beta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2}, \qquad l^2 = \left(1 - \frac{3\cos\varepsilon}{2 + \cos\varepsilon}\right) l'^2.$$

Dans les deux cas, l diffère essentiellement de l', en plus dans l'un, en moins dans l'autre. En un mot, pour ces deux positions, le triangle $\overline{ABC}$ est isocèle.

A toutes les autres valeurs de β, correspondent des triangles scalènes. Lorsque la médiane $\overline{OA}$ est dirigée suivant l'un des côtés du losange, β est, ou nul, ou égal à ε; les deux carrés (l'^2, l''^2) ne sont plus égaux; leur différence étant $l^2\sqrt{3}\cos\varepsilon$, et leur somme $2l^2$, d'après les relations (26), ils se partagent les deux valeurs

$$l^2\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varepsilon\right).$$

Le plus grand écart des carrés (l'^2, l''^2) a lieu pour les valeurs de β qui annulent $\cos(\varepsilon - 2\beta)$, lesquelles sont $\beta = \frac{\varepsilon}{2} \mp \frac{\pi}{4}$. La médiane $\overline{OA}$ est alors également inclinée sur les deux diagonales du losange, et d'après les relations (26), les carrés (l'^2, l''^2) se partagent les deux nouvelles valeurs

$$l^2\left(1 + \frac{3}{2\,\mathrm{tang}^2\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\mathrm{tang}\,\varepsilon}\right).$$

§ CLI.

CONSTRUCTION GRAPHIQUE GÉNÉRALE.

Généralement, la direction de la médiane $\overline{AO}$ étant donnée sur la base losange, on détermine la forme du triangle ABC correspondant, par une construction très-simple, qui se déduit des considérations suivantes.

La lettre a désignant, pour simplifier, la première des trois fractions

$$(29)\qquad \frac{2l'\sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{l[1 - \cos\varepsilon\cos(\varepsilon - 2\beta)]}{\sin\varepsilon} = \frac{\rho^2\sin\varepsilon}{l} = a,$$

laquelle est identiquement égale aux deux autres, d'après les formules (21), (22), et l'une de celles qui conduisent à la formule (27); si l'on substitue, dans les six ($m^{(i)}$, $n^{(i)}$) (6), aux fractions qui composent les premiers membres des équations (20), les fractions écrites aux seconds membres des mêmes équations, on obtient le tableau complet

$$(30)\left\{\begin{array}{ll} m = -\dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)}{a}, & n = -\dfrac{\sin\beta}{a}, \\ m' = \dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)+\sqrt{3}\sin\beta}{2a}, & n' = \dfrac{\sin\beta-\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta)}{2a}, \\ m'' = \dfrac{\sin(\varepsilon-\beta)-\sqrt{3}\sin\beta}{2a}, & n'' = \dfrac{\sin\beta+\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta}{2a}. \end{array}\right.$$

Avec ces valeurs, les équations en (x', y') des trois côtés (7) du triangle ABC, sont

$$(31)\left\{\begin{array}{ll} x'\sin(\varepsilon-\beta)+y'\sin\beta+a=0 & :\overline{BC} \\ x'[\sin(\varepsilon-\beta)+\sqrt{3}\sin\beta]+ & \\ \quad y'[\sin\beta-\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta)]=2a & :\overline{CA} \\ x'[\sin(\varepsilon-\beta)-\sqrt{3}\sin\beta]+ & \\ \quad y'[\sin\beta+\sqrt{3}\sin(\varepsilon-\beta)]=2a & :\overline{AB}. \end{array}\right.$$

Les coordonnées du sommet B seront données par la première équation (31), combinée avec la troisième, qu'elle réduit à

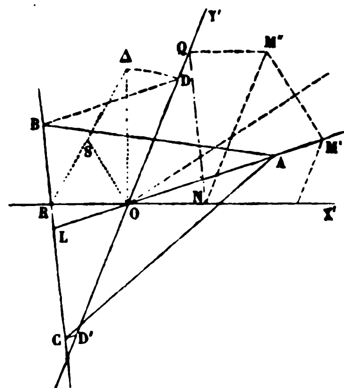
$$(32)\qquad -x'\sin\beta+y'\sin(\varepsilon-\beta)=a\sqrt{3}\qquad :B$$

et les coordonnées du sommet C seront pareillement données par la première équation (31), mais combinée avec la seconde, qu'elle réduit à

$$(33)\qquad x'\sin\beta-y'\sin(\varepsilon-\beta)=a\sqrt{3}\qquad :C.$$

Cela posé, le point M′, aux coordonnées (x', y'), appartenant à la médiane $\overline{OA}$, soit M″, aux coordonnées (x'', y''), le point symétrique de M′, par rapport à la diagonale du losange menée par l'origine O, comme l'indique la figure,

Fig. 28.



on aura : $x'' = y'$, $y'' = x'$, et conséquemment

$$(34) \qquad \frac{y'}{x'} = \frac{\sin\beta}{\sin(\varepsilon - \beta)} = \frac{x''}{y''}.$$

La diagonale $\overline{NQ}$, du parallélogramme M″NOQ, aura pour équation

$$(35) \quad \frac{X'}{x''} + \frac{Y'}{y''} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{X'\sin(\varepsilon - \beta)}{x''\sin(\varepsilon - \beta)} + \frac{Y'\sin\beta}{y''\sin\beta} = 1.$$

Or, d'après (34) les deux dénominateurs $x''\sin(\varepsilon - \beta)$, $y''\sin\beta$, sont égaux, donc le côté $\overline{BC}$ (31) sera parallèle à cette diagonale.

Ainsi, prenant, sur le prolongement de $\overline{AO}$, la longueur $\overline{OL}$ égale à la seule ligne arbitraire l, puis $\overline{OA} = 2\,\overline{OL}$, on aura le sommet A, et la parallèle $\overline{LR}$ à $\overline{NQ}$ donnera la direction du côté BC. Or cette droite $\overline{BC}$ étant

représentée par la première (31), doit venir couper l'axe des x', au point dont les coordonnées sont

$$y' = 0, \quad x' = -\frac{a}{\sin(\varepsilon - \beta)},$$

et, puisque ce point est maintenant R, on a nécessairement

$$(36) \qquad \frac{a}{\sin(\varepsilon - \beta)} = \overline{OR}.$$

Les deux droites (32) et (33) sont parallèles à la médiane $\overline{AO}$, d'après (34). Elles coupent l'axe des y', en deux points (D, D') situés, l'un sur la partie positive, l'autre sur la partie négative de cet axe, à la même distance de l'origine O, laquelle distance a pour grandeur absolue

$$\frac{a}{\sin(\varepsilon - \beta)}\sqrt{3},$$

ou $\overline{OR}\sqrt{3}$, d'après (36), ou $\overline{OR}$ tang $\frac{\pi}{3}$. Or, si l'on construit sur $\overline{OR}$ le triangle équilatéral ORS, la perpendiculaire, en O, à l'axe des x', viendra rencontrer le côté $\overline{RS}$ prolongé, en un point Δ, tel que $\overline{O\Delta} = \overline{OR}$ tang $\frac{\pi}{3} = \overline{OR}\sqrt{3}$; on aura donc les points (D, D') en prenant $\overline{OD} = \overline{OD'} = \overline{O\Delta}$. Les parallèles à $\overline{AO}$, menées par ces points, iront couper la droite $\overline{LR}$ aux sommets B et C. Et le triangle $\overline{ABC}$ sera déterminé.

On remarquera que le triangle rectangle ROΔ est hémirégulier, ou semblable à la moitié du triangle équilatéral; ainsi, l'hypoténuse $\overline{R\Delta}$ est double du côté $\overline{RS} = \overline{RO}$, et l'angle en R étant $\frac{\pi}{3}$, celui en Δ est $\frac{\pi}{6}$. En appliquant la

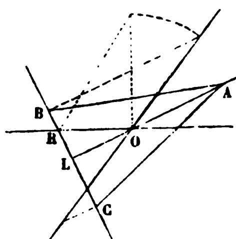
construction précédente aux cas extrêmes du § CL, on retrouve leurs propriétés spéciales.

§ CLII.

APPLICATIONS ET VÉRIFICATION.

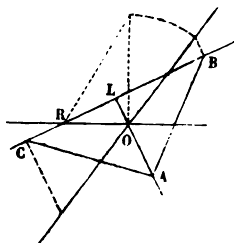
Si la médiane $\overline{OA}$ est dirigée suivant la bissectrice de l'angle ε, le point M′ étant lui-même son symétrique, $\overline{LR}$ est parallèle à la seconde diagonale, et conséquemment perpendiculaire à AO, le triangle ABC est donc isocèle.

Fig. 29.



Si la médiane $\overline{AO}$ est parallèle à la seconde diagonale du losange, $\overline{LR}$ l'est à la première; le côté $\overline{BC}$ est conséquemment perpendiculaire à $\overline{AO}$, et le triangle est encore isocèle.

Fig. 30.



Quand la médiane $\overline{OA}$ est couchée sur un des côtés du losange, le point M'' est situé sur l'autre côté, auquel $\overline{LR}$ est conséquemment parallèle, et le triangle est scalène.

Fig. 31.

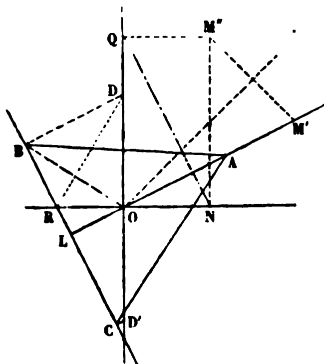
Quand la médiane $\overline{OA}$ est également inclinée sur les deux diagonales du losange, M' étant situé sur l'une des bissectrices de leurs angles droits, M'' l'est sur l'autre, et l'on obtient un nouveau triangle scalène

Fig. 32.

Voici, maintenant, la vérification la plus importante. Si l'on applique la construction générale au cas où le losange est un carré, on doit trouver un triangle équilatéral, pour

une position quelconque de la médiane $\overline{OA}$. Et, en effet, la

Fig. 33.



diagonale NQ fait avec l'axe des y' l'angle β, tandis que $\overline{AO}$ fait actuellement avec le même axe l'angle complémentaire $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$; $\overline{LR}$ est donc perpendiculaire à la médiane. De plus, les points (Δ, D) se confondant, le triangle ROD est hémi-régulier, et l'angle en D est $\frac{\pi}{6}$; de là résulte que, dans le quadrilatère inscriptible DORB, la diagonale $\overline{OB}$ fera avec $\overline{BC}$ le même angle $\frac{\pi}{6}$, et conséquemment avec $\overline{OL}$ l'angle $\frac{\pi}{3}$; c'est-à-dire que le triangle rectangle OBL sera hémi-régulier; on aura donc $\overline{OB}$ ou $2\,l'$ égal à deux fois $\overline{OL}$ ou l, ou enfin $l' = l$.

§ CLIII.

CARACTÈRE DISTINCTIF DES PRISMES PSEUDORÉGULIERS.

Il importe de remarquer que, pour le même angle ε, ou pour le même losange, toutes les variations de forme du

triangle ABC sont complétement indépendantes de la direction de la troisième arête primitive. Ces variations restent absolument les mêmes, que le prisme primitif soit droit ou oblique, symétrique ou non. Ce qui montre clairement que les prismes triangulaires et hexagonaux des milieux cristallins, traitables par le second des deux groupes de séries définis au § XCIV, diffèrent essentiellement des polyèdres dont les solutions sont déduites de l'application du premier de ces groupes, et dont toutes les arêtes ont des directions dépendantes, d'après la loi de conjugaison exprimée par l'ellipsoïde principal.

SEIZIÈME LEÇON.

THÉORIE DE LA FORMATION DES CRISTAUX.

Explication physique de la cristallisation, fondée sur l'existence des vibrations. — Faits principaux. — Lemmes. — Partage du liquide cristallin en concamérations polyédriques. — Explication des facettes secondaires, et de leurs associations.

---

§ CLIV.

EXTENSION AUX CRISTAUX DIAPHANES.

Les propriétés intégrales, exposées dans les leçons précédentes, ne sont rigoureusement établies, que pour les solides athermanes. Mais on conçoit que ces propriétés peuvent être étendues aux cristaux diaphanes. En effet, l'expérience paraît indiquer que la chaleur rayonnante qui les traverse, n'éprouve de perte réelle qu'à l'entrée et à l'émergence. S'il en est ainsi, un élément parallélipipédique intérieur rayonnera, toutes choses égales d'ailleurs, la même quantité de chaleur, qu'il soit éloigné des faces du cristal, ou qu'il soit très-voisin de l'une d'elles. On pourra donc adopter, pour lui, la loi du rayonnement à la surface, c'est-à-dire admettre que, dans le temps dt, il perdra par rayonnement une quantité de chaleur égale au produit de dt par son volume $dx\,dy\,dz$, par un certain pouvoir émissif $\mathcal{E}$, et par l'excès de sa température actuelle W sur celle de l'enceinte prise pour zéro.

En outre, il devra échanger de la chaleur avec les molécules voisines, en obéissant aux mêmes lois que dans les solides athermanes, mais avec des coefficients relativement moindres. Car, si les corps diaphanes sont généralement mauvais conducteurs, s'ils peuvent se briser ou s'altérer lors des variations trop brusques de température, ils conduisent néanmoins la chaleur; et l'on ne saurait expliquer ces faits, sans admettre un échange direct entre molécules extrêmement voisines, quelque faible qu'il soit.

Adoptant ces vues, si l'on introduit, pour simplifier, le nouveau rapport

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{E}}{q} = \lambda^2,$$

on arrive facilement à la conclusion, que l'équation générale qui régit la température, dans les milieux cristallisés diaphanes, peut ou doit être de la forme

$$(2) \qquad A^2 \frac{d^2 W}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2 W}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2 W}{dz'^2} = k \frac{dW}{dt} + \lambda^2 W.$$

Or, cette nouvelle équation est satisfaite, si l'on pose

$$(3) \qquad W = e^{-\lambda^2 \frac{t}{k}} . V,$$

la fonction facteur V vérifiant l'équation

$$(4) \qquad A^2 \frac{d^2 V}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2 V}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2 V}{dz'^2} = k \frac{dV}{dt},$$

ou celle qui régit la propagation de la chaleur dans les cristaux athermanes. Il suffira donc, d'après cela, de multiplier toutes les séries particulières des leçons précédentes, par l'exponentielle du second membre (3), pour qu'elles puissent exprimer la loi intégrale du refroidissement par communication des mêmes polyèdres, devenus *diathermanes*, d'athermanes qu'ils étaient.

§ CLV.

FAITS PRINCIPAUX.

Une plus longue discussion, sur la constitution intérieure des milieux pondérables, établirait plus rigoureusement la coexistence, et la séparation nécessaire, de l'échange direct de chaleur entre molécules voisines, et de la perte par rayonnement. Mais nous supprimerons ces développements, et d'autres encore, dans une leçon, dont le seul but est d'esquisser une théorie physique de la formation des cristaux. Cette théorie s'appuie sur deux faits principaux, et sur un principe hypothétique que d'autres faits rendent très-probable.

PREMIER FAIT PRINCIPAL. *Une dissolution saline concentrée, qui se refroidit lentement, sans agitation, ni courants intérieurs, dépose le sel en cristaux de forme régulière.* L'expérience prouve que, si le liquide est agité, ou qu'il se refroidisse rapidement, la cristallisation est confuse.

SECOND FAIT PRINCIPAL. *Le sel est uniformément répandu dans tout le volume du liquide, de manière à pouvoir se résoudre en cristaux dans un lieu quelconque de ce volume.* On connaît cette expérience, d'une dissolution saturée, introduite chaude dans un tube, qu'on ferme ensuite par une pointe effilée, et qui cristallise en masse, quand on casse la pointe du tube refroidi. Cette expérience prouve le fait énoncé, et indique, en outre, qu'un ébranlement peut être la cause déterminante de la cristallisation.

Ces deux faits justifient, en quelque sorte, la dénomination de *liquide cristallin*, que nous donnerons à la dissolution saline concentrée.

Avant d'énoncer le principe hypothétique adopté, deux digressions, ou plutôt deux lemmes, sont nécessaires.

§ CLVI.

PREMIER LEMME.

Lorsque l'on cherche à établir les lois qui doivent régir les vibrations d'un milieu élastique, dans lequel l'élasticité est constante pour toutes les directions, on arrive, entre autres, à une équation aux différences partielles de la forme

$$(5) \qquad a^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}\right)=\rho^2\frac{d^2F}{dt^2},$$

ρ^2 représentant la densité, a^2 un coefficient d'élascité. Cette équation régit deux fonctions différentes, l'une est la dilatation cubique, l'autre une sorte de *potentiel* de l'élasticité. Les projections du déplacement moléculaire étant représentées par (u, v, w), la dilatation cubique est $\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$; c'est la première fonction F. En outre, s'il s'agit de vibrations avec changement de densité, ou dites *longitudinales*, les (u, v, w) sont les dérivées en (x, y, z) d'une même fonction F, qui doit aussi vérifier l'équation (5); c'est cette seconde fonction que j'appelle potentiel de l'élasticité. Si l'élasticité est changeante avec la direction, on peut établir, comme pour la chaleur, que l'équation générale prendra la forme

$$(6) \qquad A^2\frac{d^2F}{dx'^2}+B^2\frac{d^2F}{dy'^2}+C^2\frac{d^2F}{dz'^2}=\rho^2\frac{d^2F}{dt^2}$$

en coordonnées obliques.

Cela posé, on fait voir, sans grande difficulté, que, lors

des vibrations, le concours de deux systèmes d'ondes, les unes directes, les autres réfléchies, partage le milieu en concamérations polyédriques, vibrant à l'unisson, et séparées par un réseau de surfaces planes. Alors s'il s'agit de trouver la loi intégrale du mouvement vibratoire de l'une de ces concamérations, il faut intégrer convenablement l'équation (6).

A cet effet, on compose le potentiel F, d'une somme de termes simples

$$(7) \qquad F = \mathbf{S}\, MU \cos\left[\theta\pi \frac{t}{\rho}\right],$$

où le facteur U, fonction de (x', y', z'), est lui-même la réunion de plusieurs termes partiels, trigonométriques et périodiques, correspondant au même paramètre θ, et tellement choisis, que l'une des dérivées de U, ou une somme linéaire de ses trois dérivées, s'annule à la surface du polyèdre, afin d'exprimer que les molécules de cette surface n'en sortent pas. Puis on détermine le coefficient général M, de telle sorte que, pour $t = 0$, on ait

$$(8) \qquad \mathbf{S}\, MU = f,$$

f étant l'état initial de la fonction F.

Le problème d'analyse à résoudre est identiquement le même que celui de la question relative à la chaleur, étudiée dans les dix leçons précédentes, et ses applications spéciales sont aussi les mêmes, à quelques changements près, dans les signes des termes partiels, et dans l'emploi, ou des cosinus, ou des sinus. On pourra donc traiter, de la même manière, l'état vibratoire de tous les polyèdres que nous avons considérés, et dont le refroidissement s'exprime par des séries trigonométriques et périodiques, non-seulement quand leur surface est entretenue à une température

19.

fixe, mais aussi quand cette même surface est imperméable à la chaleur, ou sans flux. Cette communauté des deux solutions constitue le premier lemme.

§ CLVII.

SECOND LEMME.

Il résulte d'une belle suite d'expériences directes, due à M. Despretz, que l'échauffement d'un liquide par en haut, et son refroidissement par en bas, en évitant le plus possible tout courant intérieur, paraissent s'opérer suivant les mêmes lois que l'échauffement et le refroidissement des solides. On peut admettre, d'après cela, qu'un liquide cristallin se conduit, relativement à la propagation de la chaleur, comme s'il était solide. C'est-à-dire que, pour lui, l'équation qui régit la température est la même que pour le milieu cristallisé, avec la seule différence de grandeur du coefficient $k = \frac{\Gamma\Delta}{q}$. On conçoit, en effet, que si l'on cherche à établir l'équation générale de la chaleur dans le milieu liquide, *lorsque ses molécules ne se déplacent pas,* on sera conduit aux mêmes conséquences, à la même théorie de la conductibilité, soit constante, soit changeante avec la direction, que pour un milieu solide.

Pareillement, si l'on cherche à établir les équations qui doivent régir les vibrations dues à l'élasticité du même liquide cristallin, *lorsque ses molécules ne font qu'osciller autour de leurs positions d'équilibre,* on sera encore conduit aux mêmes conséquences, à la même théorie de l'élasticité, soit constante, soit changeante avec la direction, que pour un milieu solide. Il n'y aura d'autre différence que dans la grandeur absolue des coefficients, qui pourront conserver les mêmes rapports, en obéissant aux mêmes

lois. C'est ainsi que certaines propriétés des cristaux solides, telles que le pouvoir rotatoire des plans de polarisation, se retrouvent dans les dissolutions du même sel.

Cette extension des deux solutions, au liquide cristallin, constitue le second lemme. Là, comme dans le premier, les lois du refroidissement, et celles de l'état vibratoire, se superposent en quelque sorte. Mais, il y a cette différence remarquable, que, pour la chaleur, l'intégrale par série périodique n'a rien d'essentiel, et n'est qu'accidentelle; tandis que, pour les vibrations, cette forme périodique est exigée par l'existence de concamérations identiques, vibrant à l'unisson. Cette dernière nécessité, parait indiquer que la forme polyédrique des cristaux naturels, est le résultat d'un phénomène de vibrations.

§ CLVIII.

PRINCIPE ADOPTÉ.

Regardant cette indication comme une preuve, nous adopterons pour principe, que *la dissolution saline concentrée, ou le liquide cristallin, se partage, dès l'abord, en concamérations polyédriques, par l'effet des vibrations*. Les causes de ces vibrations, ou ces vibrations elles-mêmes, ne seraient-elles autres que la *chaleur?* C'est ce que nous ne déciderons pas. D'ailleurs, à la surface libre de la dissolution saline, la couche de liquide pur qui s'évapore, abandonne violemment les molécules de sel qu'elle contenait, lesquelles refluent dans la masse; et voilà une cause très-admissible d'ondes directes. La surface libre, et plane, serait alors le lieu de *ventres de vibration*.

On peut appeler hypothétique, le principe que je viens d'énoncer, jusqu'à ce qu'on soit forcé de reconnaître, que la forme polyédrique des cristaux naturels, signale l'exis-

tence primordiale des vibrations, dans le phénomène de la cristallisation, avec la même certitude que le sable dessinant des lignes nodales sur les surfaces vibrantes.

§ CLIX.

THÉORIE PHYSIQUE.

Si l'on rapproche les diverses parties du Cours actuel, de la définition du liquide cristallin, qui résulte des deux faits principaux, et que l'on adopte le principe précédent, étayé par les deux lemmes, on construit facilement une explication physique de la formation des cristaux, quelle qu'en soit la complication.

Soit pris pour exemple le cas d'un sel dont la forme primitive est un parallélipipède obliquangle. Le liquide salin s'est partagé, dès l'abord, en concamérations, ou en éléments parallélipipédiques, sous l'influence primordiale des vibrations. Dans chacun de ces éléments, maintenant limités, les molécules salines vont en se rapprochant de plus en plus vers la solidité. Ces éléments sont séparés par des couches de liquide pur, ayant la température de la dissolution, que l'on peut regarder comme fixe, à cause de la lenteur nécessaire du refroidissement général. Ces couches liquides, d'abord infiniment minces, peuvent augmenter progressivement d'épaisseur. Enfin, ceux des éléments qui sont dans le voisinage de la masse déjà cristallisée, obéissant à son attraction, locale et plus puissante, lui donnent une nouvelle couche, en abandonnant plus complétement leur réseau liquide.

Chaque volume élémentaire, d'abord suréchauffé par les premiers progrès de la solidification, se refroidit ensuite comme s'il était isolé, et suivant les mêmes lois que s'il faisait partie du milieu cristallisé, sa surface étant entrete-

nue à la température à très-peu près constante du réseau liquide qui l'entoure. Le dépôt cristallin ne s'opère que quand le refroidissement des volumes élémentaires est parvenu à un certain degré.

Remarquons que, dans cette manière très-simple de concevoir le phénomène de la cristallisation, le liquide pur, ou qui ne contient que d'autres sels, peut se mouvoir librement dans les cloisons du réseau de séparation; que même les volumes élémentaires, à demi solidifiés, peuvent se mouvoir de toutes pièces, monter ou descendre, sans que les lois de leur refroidissement en soient notablement changées : car, c'est comme si, lors du refroidissement d'un solide dans la glace fondante, on le faisait voyager dans le bain qui l'entoure.

§ CLX.

FACETTES SECONDAIRES.

Maintenant, rien n'oblige à supposer que la forme des volumes élémentaires soit partout et toujours la même, celle du parallélipipède aux faces primitives. On conçoit que la rapidité plus ou moins grande de l'évaporation, que l'acuïté des vibrations originelles, que la forme des parois, que celle des cristaux déjà formés, puissent occasionner le partage en volumes élémentaires d'une autre forme. On sait qu'en immergeant, dans la dissolution saline concentrée, un premier cristal d'une certaine forme, il grossit en la conservant; preuve de l'influence d'une partie des parois.

Ainsi, il pourra exister des volumes élémentaires ayant la forme des prismes triangulaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, des tétraèdres $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, ou de tout autre polyèdre dont la périodicité est possible. Ces nouveaux volumes élémentaires, parvenus au

degré de refroidissement ou de solidité convenable, se déposeront sur le cristal formé, en donnant une de leurs faces à ce cristal; c'est-à-dire, ou des faces primitives, ou des faces tangentes. Ces dernières pourront même exister seules. D'où résultent, le prisme secondaire aux faces latérales tangentes avec les prismes triangulaires $\frac{1}{4}$, l'octaèdre et le dodécaèdre rhomboïdal avec les tétraèdres $\frac{1}{24}$. On explique ainsi les faces primitives, les facettes tangentes sur les arêtes, les formes secondaires correspondantes des cristaux naturels.

Puis, comme nous avons démontré, pour la première fois dans ce Cours, qu'il existe des volumes élémentaires en nombre infini d'une autre forme que ceux à faces primitives et tangentes, lesquels satisfont aux conditions de la périodicité, on expliquera, de la même manière, à l'aide de cette extension nouvelle : les facettes non tangentes sur les arêtes; les troncatures tangentes, semitangentes ou non tangentes sur les sommets; les associations de certaines facettes sur les arêtes et sur les sommets; les octaèdres et les tétraèdres pseudo-primitifs, ainsi que leurs facettes; les faisceaux de prismes triangulaires et hexagonaux, réguliers ou pseudo-réguliers.

Remarquons, enfin, qu'à chaque dépôt de volumes élémentaires sur la masse déjà cristallisée, la forme des parois subit, par ce dépôt même, une modification qui peut déterminer un partage différent du liquide, ou de nouvelles formes de volumes élémentaires.

§ CLXI.

ASSOCIATIONS DE FACETTES.

Les associations de facettes et de troncatures peuvent être établies, ou expliquées, de deux manières différentes. Rap

pelons d'abord que les lois du refroidissement, et celles de l'état vibratoire, d'un polyèdre élémentaire, sont régies par les deux équations

$$A^2 \frac{d^2 V}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2 V}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2 V}{dz'^2} = k \frac{dV}{dt},$$

$$\frac{d^2 F}{dx'^2} + B^2 \frac{d^2 F}{dy'^2} + C^2 \frac{d^2 F}{dz'^2} = \rho^2 \frac{d^2 F}{dt^2},$$

et que les intégrales de ces deux équations peuvent être exprimées, en quelque sorte parallèlement, comme il suit

(9) $$V = \mathrm{S}\, MU e^{-\pi^2 \theta^2 \frac{t}{k}},$$

(10) $$F = \mathrm{S}\, MU \cos\left[\pi\theta \frac{t}{\rho}\right]:$$

la fonction U étant composée de termes de la forme

(11) $$\begin{matrix}\cos \\ \text{ou} \\ \sin\end{matrix}\left[\pi\left(\lambda \frac{x'}{A} + \mu \frac{y'}{B} + \nu \frac{z'}{C}\right)\right]$$

correspondant au même paramètre

$$\theta^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

et tellement réunis, que cette fonction U, ou une somme linéaire de ses dérivées, s'annule à la surface du polyèdre élémentaire.

La détermination générale du coefficient M indique que, si l'état initial le permet, l'une ou l'autre des deux intégrales (9) et (10) pourra se réduire à un seul terme. Dans tous les cas, c'est-à-dire quel que soit l'état initial des températures, vers la fin du refroidissement du volume élémentaire, un instant avant son dépôt sur la masse cristallisée, les termes de l'intégrale V (9) correspondant aux grandes valeurs de θ^2 auront perdu toute importance, par

suite de la grandeur de l'exponentielle qui passe au dénominateur, et il ne restera plus d'influents qu'un ou deux termes, correspondant à la moindre, ou aux deux moindres valeurs de θ^2. Quant à la fonction intégrale F (10), elle peut se réduire, non-seulement à un seul terme, ou à une seule valeur de U, mais même à un seul des termes partiels (11). Alors le volume élémentaire, ou la concamération, est une lame indéfinie à faces parallèles, comprise entre les deux plans

$$(12) \qquad \lambda \frac{x'}{A} + \mu \frac{y'}{B} + \nu \frac{z'}{C} = \begin{cases} = \mathfrak{N}, \\ = \mathfrak{N} + 1, \end{cases}$$

$\mathfrak{N}$ étant, ou un nombre entier, ou la moitié $\left(\frac{2i+1}{2}\right)$ d'un impair, suivant la ligne trigonométrique qui doit s'annuler.

Cela posé, si le polyèdre a des faces de diverses natures, primitives, tangentes ou non tangentes, sur les arêtes ou sur les sommets, quand son refroidissement, ou sa solidification, auront atteint le degré convenable pour qu'il puisse se joindre à la masse cristallisée, il pourra s'y déposer de manière à donner au cristal l'une ou l'autre de ses faces. Si donc les volumes élémentaires ont tous la même forme, leur dépôt pourra cependant varier, de telle sorte que les facettes données au cristal soient des natures diverses qui composent leurs surfaces. C'est le genre d'association que nous avons eu en vue dans les Leçons précédentes.

Mais il peut exister à la fois des volumes élémentaires de diverses formes, pourvu qu'ils correspondent à la même suite de valeurs du paramètre θ, ou que l'acuité des vibrations qui ont déterminé le partage du liquide cristallin, soit la même pour tous ; en un mot, pourvu qu'ils soient *concordants*. Et, circonstance remarquable, s'ils sont concordants, sous le point de vue des vibrations, ils pourront

être *parallèles*, sous celui de la chaleur; c'est-à-dire que leurs températures initiales étant les mêmes, ils se refroidiront parallèlement, et atteindront, à la même époque, le degré final de température ou de solidité. Or, cette existence simultanée, de volumes élémentaires différents, mais à la fois concordants quant aux vibrations, parallèles quant aux températures, peut expliquer une multitude d'associations.

§ CLXII.

ASSOCIATIONS PAR CONCORDANCE.

En effet, comme couple de troncatures, la lame indéfinie comprise entre les plans (12) peut être désignée symboliquement par la parenthèse (λ, μ, ν); or, elle sera concordante avec une autre lame (λ', μ', ν'), si l'on a

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Donc, lorsque les deux troncatures correspondantes se rencontrent sur un même cristal, on peut expliquer leur association, par la coexistence originelle de lames élémentaires des deux espèces, dans le liquide cristallin.

Pour indiquer commodément plusieurs exemples de ce nouveau genre d'association, désignons la troncature ou la lame (λ, μ, ν): 1° par P*r* (face primitive), quand $\nu = 0$, et $\mu = 0$; 2° par A (λ, μ) (facette sur arêtes), quand $\nu = 0$; 3° par A (1, 1) (facette tangente sur arête) si, ν étant nul, μ égale λ; 4° par S (λ, μ, ν) (troncature sur sommet), quand les trois nombres existent; 5° par S (1, 1, 1) (troncature tangente sur sommet), si $\nu = \mu = \lambda$. Généralement, quand les nombres subsistants ont un facteur commun, on peut le supprimer.

Avec cette notation, on écrit la feuille A, qu'il sera facile d'étendre et de compléter.

FEUILLE A.

	PARAMÈTRE θ^2.	LAMES ASSOCIÉES.
I.	$5^2 = 4^2 + 3^2$,	$Pr.$, $\mathcal{A}(4, 3)$;
	$13^2 = 12^2 + 5^2$,	$Pr.$, $\mathcal{A}(12, 5)$.
II.	$3^2 = 2^2 + 2^2 + 1$,	$Pr.$, $S(2, 2, 1)$;
	$7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$,	$Pr.$, $S(6, 3, 2)$.
III.	$3^2 + 3^2 = 4^2 + 1 + 1$,	$\mathcal{A}(1, 1)$, $S(4, 1, 1)$;
	$4^2 + 1 = 3^2 + 2^2 + 2^2$,	$\mathcal{A}(4, 1)$, $S(3, 2, 2)$;
	$5^2 + 1 = 4^2 + 3^2 + 1$,	$\mathcal{A}(5, 1)$, $S(4, 3, 1)$;
	$5^2 + 2^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$,	$\mathcal{A}(5, 2)$, $S(4, 3, 2)$;
	$6^2 + 3^2 = 5^2 + 4^2 + 2^2$,	$\mathcal{A}(2, 1)$, $S(5, 4, 2)$;
	$7^2 + 2^2 = 6^2 + 4^2 + 1$,	$\mathcal{A}(7, 2)$, $S(6, 4, 1)$.

IV.	$6^2 + 1 + 1 = 5^2 + 3^2 + 2^2$,	$S(6, 1, 1)$, $S(5, 3, 2)$;
	$5^2 + 5^2 + 1 = 7^2 + 1 + 1$,	$S(5, 5, 1)$, $S(7, 1, 1)$;
	$5^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 3^2 + 1$,	$S(5, 5, 3)$, $S(7, 3, 1)$;
	$6^2 + 5^2 + 1^2 = 7^2 + 3^2 + 2^2$,	$S(6, 5, 1)$, $S(7, 3, 2)$.
V.	$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1 = 5^2 + 4^2 + 3^2$;	$\mathcal{A}(1, 1)$, $\mathcal{A}(7, 1)$, $S(5, 4, 3)$;
	$7^2 + 4^2 = 8^2 + 1 = 6^2 + 5^2 + 2^2$,	$\mathcal{A}(7, 4)$, $\mathcal{A}(8, 1)$, $S(6, 5, 2)$.
VI.	$5^2 + 4^2 = 4^2 + 4^2 + 3^2 = 6^2 + 2^2 + 1$.	$\mathcal{A}(5, 4)$, $S(4, 4, 3)$, $S(6, 2, 1)$;
	$8^2 + 5^2 = 9^2 + 2^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2 + 2^2$.	$\mathcal{A}(8, 5)$, $S(9, 2, 2)$, $S(7, 6, 2)$.
VII.	$6^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 5^2 + 2^2 = 7^2 + 2^2 + 1$,	$S(2, 1, 1)$, $S(5, 5, 2)$, $S(7, 2, 1)$;
	$5^2 + 5^2 + 4^2 = 7^2 + 4^2 + 1 = 8^2 + 1 + 1$,	$S(5, 5, 4)$, $S(7, 4, 1)$, $S(8, 1, 1)$.
VIII.	$10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2 = 8^2 + 6^2 + 5^2 = 10^2 + 4^2 + 3^2$,	$\mathcal{A}(2, 1)$, $\mathcal{A}(11, 2)$, $S(8, 6, 5)$, $S(10, 4, 3)$;
	$10^2 + 5^2 + 2^2 = 11^2 + 2^2 + 2^2 = 8^2 + 8^2 + 1 = 8^2 + 7^2 + 4^2$,	$S(10, 5, 2)$, $S(11, 2, 2)$, $S(8, 8, 1)$, $S(8, 7, 4)$.
	....	....

Là se trouvent associées : une lame aux faces primitives, avec une facette (sur arête), case I, avec une troncature (sur sommet), case II ; une facette avec une troncature, case III ; deux troncatures, case IV ; deux facettes et une troncature, case V ; une facette et deux troncatures, case VI ; trois troncatures, case VII. Enfin, la case VIII donne deux exemples d'associations quadruples, le premier de deux facettes et de deux troncatures, le second de quatre troncatures.

Il importe de rappeler que, pour déduire des entiers (λ, μ, ν) ceux qui énoncent les décroissements, d'après Haüy, il faut diviser les premiers par leur moindre multiple commun ; ce qui donne autant de fractions, ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs les nombres cherchés. De là résultent, entre autres, les correspondances suivantes :

			Décroissement de
FACETTES....	Tangente.....	$\mathcal{A}(1,\ 1)$.....	1 sur 1,
	Binômes......	$\mathcal{A}(\lambda,\ 1)$.....	1 sur λ,
		$\mathcal{A}(\lambda,\ \mu)$.....	μ sur λ.
TRONCATURES.	Tangente.....	S(1, 1, 1)...	1 sur 1 et sur 1,
	Semitangentes.	S(λ, λ, 1)...	1 sur 1 et sur λ,
		S(λ, 1, 1)...	1 sur λ et sur λ,
		S(λ, λ, μ)...	μ sur μ et sur λ,
	Trinômes.....	S(6, 3, 2)...	1 sur 2 et sur 3,
		S(10, 5, 2)...	1 sur 2 et sur 5,
		S(6, 2, 1)...	1 sur 3 et sur 6,
		S(5, 4, 2)...	4 sur 5 et sur 10,
		S(6, 4, 1)...	2 sur 3 et sur 12,

qui se rapportent à la plupart des facettes et troncatures de la feuille A.

Il est sans doute très-remarquable que les deux tronca-

tures S(2, 2, 1), S(6, 3, 2), qui se présentent associées à des faces primitives, dans les deux exemples si simples de la case II, soient précisément celles que nous avons citées au § CXL, comme formant des prismes traitables, sans l'addition d'aucune troncature étrangère. Leur existence sur les cristaux naturels peut donc être attribuée, indifféremment, soit au dépôt de prismes secondaires, soit à celui de lames concordantes. D'autres rapprochements signalent, au contraire, des divergences qui dicteraient le choix à faire entre les deux causes. Mais tous ces détails dépasseraient le but que nous nous sommes proposé.

§ CLXIII.

RÉSUMÉ ET CONCLUSION.

En résumé, la théorie analytique de la chaleur, étendue aux milieux cristallins, peut exprimer par des séries trigonométriques et périodiques le refroidissement d'une infinité de polyèdres, quand leur surface est, ou entretenue à une température fixe, ou imperméable à la chaleur, c'est-à-dire sans flux. Chacun de ces polyèdres peut paver tout l'espace, de telle sorte que les plans de contact, indéfiniment prolongés, ne contiennent que des faces d'éléments composants.

Par le simple changement de chaque exponentielle,

$$e^{-\pi^2\theta^2\frac{t}{k}} \quad \text{en} \quad \cos\left(\pi\theta\frac{t}{\rho}\right),$$

les mêmes séries, trigonométriques et périodiques, peuvent exprimer l'état vibratoire du milieu cristallisé, partagé en concamérations concordantes, ayant pour forme les mêmes polyèdres, quand les molécules de leurs surfaces n'en sortent pas. Ainsi, il y a identité des solutions analytiques, relativement aux mêmes corps, pour la théorie de l'élasti-

cité et pour celle de la chaleur ; mais la forme périodique de ces corps est nécessaire dans la première théorie, elle n'est qu'accidentelle dans la seconde.

Il y a donc lieu de penser que la formation des cristaux polyédriques naturels a pour cause originelle un phénomène de vibrations. Partant de cette idée, comme d'un principe posé, on en déduit la théorie physique précédente, dont voici, en peu de mots, la base et la définition succincte.

Les lois de la propagation de la chaleur, et celles des vibrations, dans les cristaux solides, peuvent être étendues au liquide salin concentré, qui dépose ces cristaux, s'il se refroidit lentement, sans courant intérieur, et si les molécules ne se déplacent que pour osciller autour de leurs positions d'équilibre. Dès l'abord, ce liquide se partage en concamérations concordantes, par des vibrations qui y naissent ou qui lui sont communiquées. Il en résulte des volumes élémentaires polyédriques, de l'une des formes trouvées, qui se solidifient progressivement, se refroidissent, et finissent par se déposer sur la masse cristallisée, à laquelle chacun donne une de ses faces.

Si l'on compare cette explication physique à toutes les idées qui ont été émises jusqu'ici sur le même sujet, on reconnaît d'abord qu'elle ne leur est pas inférieure comme moyen de coordination. Puis, en y réfléchissant, on trouve qu'elle est la seule qui puisse rendre compte, sans exception, de tous les phénomènes physiques observés sur les cristaux naturels. Mais il y a plus : quand on admet la réalité de cette théorie, on ne comprend pas que les volumes élémentaires, qui vibraient dans le liquide cristallin, cessent de vibrer quand ils font partie intégrante du cristal formé. Et l'on se trouve sur une voie nouvelle, qui peut conduire au véritable principe de la mécanique moléculaire.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENT PAR RAYONNEMENT.

Refroidissement d'un mur, dont les faces rayonnent inégalement. — Termes simples; détermination des paramètres. — Série totale; introduction et vérification de l'état initial. — Cas des faces similaires. — Variétés de l'état initial, et du pouvoir émissif.

§ CLXIV.

CAS GÉNÉRAL DU MUR.

Les leçons qui vont suivre ont pour objet d'étudier la loi intégrale du refroidissement des corps solides de forme polyédrique, lorsque leurs faces rayonnent la chaleur vers une enceinte dont la température fixe est prise pour zéro.

Dans ces circonstances, s'il s'agit d'un milieu homogène et non cristallin, l'équation générale est

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = k\frac{dV}{dt},$$

où le coefficient k est le rapport $\left(\frac{\Gamma\Delta}{q}\right)$, du produit du calorique spécifique Γ par la densité Δ, à la conductibilité constante q. L'équation à la surface σ devient

$$(2) \qquad \left(\frac{dV}{dx}\cos\xi + \frac{dV}{dy}\cos\eta + \frac{dV}{dz}\cos\zeta + lV\right)_\sigma = 0;$$

(ξ, η, ζ) étant les angles que la normale extérieure, en chaque point de σ, fait avec les (x, y, z); la *conductibi-*

lité extérieure l étant le rapport $\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)$, à la conductibilité intérieure q, du pouvoir émissif ε, en ce point de la surface σ. L'état initial est

$$(3) \qquad V_0 = \mathrm{f}(x, y, z) = \mathrm{f}.$$

La fonction intégrale V se compose d'une somme de termes simples, vérifiant tous et séparément les équations (1) et (2), et contenant chacun un coefficient que l'on détermine, de telle sorte que la série totale reproduise la fonction f (3) lorsque $t = 0$.

Analytiquement, le cas le plus simple est celui d'un mur solide indéfini, compris entre deux faces rayonnantes

$$(4) \qquad x = +a, \quad x = -a,$$

lorsque f ne dépend que de x. Car, tous les points situés sur un même plan parallèle aux faces, étant identiques, et par la position, et par l'état initial, le seront encore à toute époque, et la fonction V ne dépendra que de (x, t). L'équation (1) se réduit donc a

$$(5) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = k\frac{dV}{dt}.$$

L'équation à la surface (2) se décompose en deux autres : car, la normale extérieure à la première face (4) faisant avec l'axe des x l'angle zéro, celle à la seconde fait avec le même axe l'angle π; on a donc $\cos\eta = 0$, $\cos\zeta = 0$, dans les deux cas, mais $\cos\xi = +1$ dans le premier, et $\cos\xi = -1$ dans le second; ce qui donne le groupe

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dV}{dx} + lV\right)_{+a} = 0, \\ &\left(-\frac{dV}{dx} + l'V\right)_{-a} = 0, \end{aligned}\right.$$

quand les deux faces rayonnent inégalement, c'est-à-dire ont des conductibilités extérieures différentes (l et l'). Enfin, l'état initial, pour $t = 0$, est

$$V_0 = f(x) = f. \tag{7}$$

§ CLXV.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES.

Tout terme simple, qui doit être une intégrale particulière de l'équation (5), peut être pris sous la forme

$$V_1 = e^{-m^2 \frac{t}{k}} \cos(mx + \psi), \tag{8}$$

où le paramètre m et l'arc complémentaire ψ sont des constantes. Pour qu'il vérifie les conditions (6), il faut que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} \tan(ma + \psi) &= \frac{l}{m} = \tan\mu, \\ \tan(ma - \psi) &= \frac{l'}{m} = \tan\mu', \end{aligned} \right. \tag{9}$$

μ et μ' désignant les deux arcs, moindres que $\frac{\pi}{2}$, dont les tangentes reproduisent les quotients de l et de l' par m. C'est-à-dire que les arcs $(ma + \psi)$ et $(ma - \psi)$ doivent être deux multiples de π, augmentés de μ et μ'; ce qui donne les équations

$$ma + \psi = j\pi + \mu, \quad ma - \psi = j'\pi + \mu';$$

d'où l'on déduit, en remplaçant la somme de $(j + j')\pi$ des deux multiples par un seul, $i\pi$, et observant que le complément ψ peut être augmenté de $j'\pi$, sans changer la va-

leur absolue de V_1 (8),

$$(10)\qquad \begin{cases} ma = \dfrac{i\pi + \mu + \mu'}{2}, \\ \psi = \dfrac{i\pi + \mu - \mu'}{2}. \end{cases}$$

Les groupes (9) et (10) donnent, pour ma, les trois valeurs égales

$$(11)\qquad \frac{al}{\operatorname{tang}\mu} = \frac{al'}{\operatorname{tang}\mu'} = \frac{i\pi + \mu + \mu'}{2};$$

et cette équation multiple, qui doit déterminer les augments μ et μ', pour chaque valeur de l'entier i, indique que les deux produits al, al', sont de simples rapports numériques, ou sans dimension géométrique. Ce que l'on constate sans peine, car on a

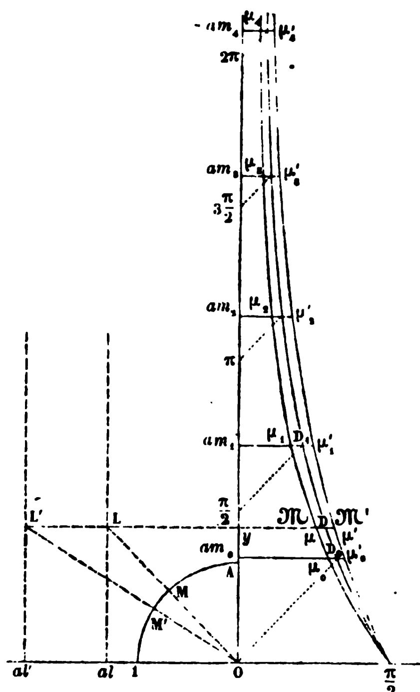
$$(12)\qquad al = \frac{a\varepsilon}{q} = \frac{\varepsilon . W . \sigma . \tau}{q . \dfrac{W}{a} . \sigma . \tau},$$

τ étant un certain temps, σ une aire plane, W une température; or, le numérateur de la dernière fraction est la quantité totale de chaleur, rayonnée pendant le temps τ, par l'aire σ, prise sur une surface plane ayant le pouvoir émissif ε, et la température stationnaire W, quand celle de l'enceinte est fixée à zéro. Et le dénominateur est la quantité totale de chaleur, qui traverse, pendant le même temps τ, l'aire σ, prise sur une section parallèle aux faces d'un mur solide, d'épaisseur a, et de conductibilité q, quand la différence des températures de ses deux faces est partout et constamment W. Donc al est le rapport numérique de deux quantités de chaleur.

La figure, ci-après, indique le moyen de déterminer gra-

phiquement les augments (μ_i, μ'_i) et les produits am_i, qui correspondent à tous les entiers i.

Fig. 34.



A l'exception de A, les divers points marqués sur l'axe vertical des y, et sur l'axe horizontal des x, sont désignés par leurs distances à l'origine O. Dans le faisceau des trois courbes, la moyenne, que nous appellerons *diamétrale*, passe par les milieux des cordes horizontales qui aboutissent aux deux autres. Ces dernières ont pour équations

$$(13) \qquad y = \frac{al}{\tang x}, \quad y = \frac{al'}{\tang x};$$

elles coupent l'axe des x au même point $\frac{\pi}{2}$, et s'approchent asymptotiquement de l'axe des y. Leur construction par points est indiquée : la parallèle aux x, menée par l'extrémité d'une ordonnée $\overline{Oy}$, coupe les verticales élevées en al et al', aux points L et L'; les hypoténuses $\overline{OL}$, $\overline{OL'}$, tracent sur le quart de cercle de rayon 1 dont le centre est en O, deux points, M, M'; les arcs $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$, étant développés sur $\overline{y\mathfrak{M}}$, $\overline{y\mathfrak{M}'}$, les points $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, appartiennent aux deux courbes (13), et le milieu D de $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}$ à la diamétrale.

D'après cette construction, μ et μ' étant les abscisses de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, la moyenne $\frac{1}{2}(\mu + \mu')$ sera celle de D, et l'on aura une solution de l'équation multiple (11), si l'ordonnée commune, qui sera alors am (10), surpasse cette moyenne d'un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Donc, la diamétrale étant tracée, par tout point, $i\frac{\pi}{2}$, de l'axe des y, on mènera une droite inclinée à 45°, laquelle coupera la diamétrale au point D_i, dont l'ordonnée sera am_i, et l'abscisse $\frac{1}{2}(\mu_i + \mu_i')$.

Cette détermination graphique montre clairement que les augments μ et μ' changent avec i. Et, puisque les entiers i sont en nombre infini, il existe pareillement une infinité de couples (m, ψ) (10), tous inégaux, lesquels donnent autant de termes simples V_1 (8), satisfaisant aux conditions (6).

§ CLXVI.

TERME SIMPLE, ET SÉRIE TOTALE.

Pour simplifier, désignons par la lettre μ, surmontée d'un point, l'arc $i\pi$ augmenté de μ, les équations (10) deviendront

$$(14)\qquad ma = \frac{\dot{\mu} + \mu'}{2},\quad \psi = \frac{\dot{\mu} - \mu'}{2};$$

et, dans le terme simple (8), écrit ainsi

$$(15)\qquad V_1 = X e^{-m^2 \frac{t}{k}}$$

le facteur X admettra indifféremment les deux expressions

$$(16)\quad X = \cos\left(mx + \frac{\dot{\mu} - \mu}{2}\right) = \cos\left[\frac{\dot{\mu}(x+a) + \mu'(x-a)}{2a}\right].$$

On voit, plus directement, par la première, que ce facteur vérifie l'équation différentielle.

$$(17)\qquad \frac{d^2X}{dx^2} + m^2 X = 0,$$

par la seconde, qu'il se réduit, sur les deux faces du mur, à

$$(18)\qquad X_{+a} = \cos\dot{\mu},\quad X_{-a} = \cos\mu';$$

et, comme sa dérivée, qui peut pareillement se mettre sous la forme

$$(19)\qquad \frac{dX}{dx} = -m \sin\left[\frac{\dot{\mu}(x+a) + \mu'(x-a)}{2a}\right]$$

grale indéfinie

$$\int X^2 dx = \left\{ \begin{array}{c} = -\frac{1}{m^2}\int X \frac{d^2X}{dx^2}dx \\ = -\frac{1}{m^2} X \frac{dX}{dx} + \int (1 - X^2) dx \end{array} \right\} = \frac{mx - \frac{1}{m} X \frac{dX}{dx}}{2m}$$

d'où résulte l'intégrale définie

$$(28) \quad \int_{-a}^{+a} X^2 dx = \frac{2ma - \left(\frac{1}{m} X \frac{dX}{dx}\right)_a + \left(\frac{1}{m} X \frac{dX}{dx}\right)_{-a}}{2m}.$$

Or, les valeurs (18) et (20) donnent, par multiplication,

$$(29) \quad \left(\frac{1}{m} X \frac{dX}{dx}\right)_a = -\sin\dot{\mu}\cos\dot{\mu}, \quad \left(\frac{1}{m} X \frac{dX}{dx}\right)_{-a} = +\sin\mu'\cos\mu',$$

en supprimant le point sur μ : car le produit $\sin\alpha\cos\alpha$ reste invariable, comme $\tang\alpha$, quand on augmente ou diminue l'arc α d'un multiple quelconque de π. Avec ces valeurs (29), et celle (10) de ma, si l'on introduit, pour simplifier, le symbole trigonométrique

$$(30) \qquad \lambda(\varphi) = \varphi + \sin\varphi\cos\varphi,$$

l'intégrale définie (28) devient

$$(31) \qquad \int_{-a}^{+a} X^2 dx = a\,\frac{i\pi + \lambda(\mu) + \lambda(\mu')}{i\pi + \mu + \mu'};$$

ou bien, puisque, d'après la remarque qui précède, $[i\pi + \lambda(\mu)]$ est égal à $\lambda(\dot{\mu})$, on a, plus simplement encore,

$$(32) \qquad \int_{-a}^{+a} X^2 dx = a\,\frac{\lambda(\dot{\mu}) + \lambda(\mu')}{\dot{\mu} + \mu'}.$$

Telles sont les propriétés générales de tous les facteurs X (16). Nous désignerons ces divers facteurs, par

$(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ ou X_i, comme les paramètres par $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ ou m_i, comme les coefficients de la série (22) par $(M_0, M_1, M_2, \ldots)$ ou M_i; l'indice rappelant l'entier i correspondant. Et, quand la variable x prendra successivement les valeurs $(x', x'', x''', \ldots)$ ou $x^{(j)}$, chaque facteur X_i deviendra $(X'_i, X''_i, X'''_i, \ldots)$ ou $X_i^{(j)}$,

§ CLXVIII.

INTRODUCTION DE L'ÉTAT INITIAL.

Cela posé, il s'agit d'identifier l'équation (23). Son premier membre

$$(33) \qquad M_0 X_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots$$

se compose d'autant de termes qu'il existe de facteurs X_i, satisfaisant aux conditions (21), et possédant conséquemment les propriétés qui viennent d'être établies. Si leur nombre, que nous désignerons par $\mathfrak{N}$, était fini, le polynôme (33) contiendrait $\mathfrak{N}$ termes, et $\mathfrak{N}$ coefficients arbitraires que l'on déterminerait comme il suit. L'épaisseur $2a$, du mur solide, étant divisée en $\mathfrak{N}$ parties égales à

$$(34) \qquad \delta = \frac{2a}{\mathfrak{N}},$$

soient $(x', x'', x''', \ldots)$ les abscisses des points milieux de ces parties successives, et $(V', V'', V''', \ldots)$ les températures initiales aux mêmes points; le développement (33) devant reproduire ces températures, on aura les $\mathfrak{N}$ équations

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_0 X'_0 + M_1 X'_1 + M_2 X'_2 + \ldots = V', \\ M_0 X''_0 + M_1 X''_1 + M_2 X''_2 + \ldots = V'', \\ M_0 X'''_0 + M_1 X'''_1 + M_2 X'''_2 + \ldots = V''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et une quelconque des méthodes d'élimination connues en déduira les $\mathfrak{N}$ coefficients.

Si l'on adopte la plus élégante de ces méthodes, on additionnera les $\mathfrak{N}$ équations (35) respectivement multipliées par des facteurs préalablement choisis, de telle sorte qu'un seul des coefficients reste au premier membre. Or, le choix de ces facteurs devient facile, lorsque $\mathfrak{N}$ reprend sa véritable grandeur. En effet, si l'on désigne par le symbole

$$(36)\qquad \mathbf{S}\,[x^{(j)}]\,\delta,$$

la somme des $\mathfrak{N}$ termes correspondant au même indice i et à tous les accents j, dans les $\mathfrak{N}$ équations (35), additionnées comme il est dit, cette somme devient exactement égale à l'intégrale

$$(37)\qquad \int_{-a}^{+a}[x]\,dx,$$

quand $\mathfrak{N}$ est infiniment grand, et conséquemment δ (34) infiniment petit; on a donc alors

$$(38)\qquad \mathbf{S}\,\mathrm{X}_i^{(j)}\mathrm{X}_{i'}^{(j)}\,\delta = 0,$$

d'après le théorème (26), lorsque les indices i et i', constants dans tous les termes de cette sommation, diffèrent l'un de l'autre.

§ CLXIX.

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS.

De là résulte qu'on isolera chaque coefficient M_i à l'aide des facteurs ($\mathrm{X}'_i\,\delta$, $\mathrm{X}''_i\,\delta$, $\mathrm{X}'''_i\,\delta, \ldots$). Et, tous les coefficients étant ainsi successivement isolés, on aura le nouveau

groupe

$$(39)\quad \begin{cases} M_0 \mathbf{S}\,[X_0^{(j)}]^2\,\delta = \mathbf{S}\,V^{(j)}X_0^{(j)}\,\delta, \\ M_1 \mathbf{S}\,[X_1^{(j)}]^2\,\delta = \mathbf{S}\,V^{(j)}X_1^{(j)}\,\delta, \\ M_2 \mathbf{S}\,[X_2^{(j)}]^2\,\delta = \mathbf{S}\,V^{(j)}X_2^{(j)}\,\delta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de $\mathfrak{N}$ équations, déduites des (35).

Les températures initiales (V', V'', V''',...) peuvent avoir toutes les grandeurs relatives imaginables; l'une peut être brusquement très-petite, ou très-grande, comparée à celle qui la précède; c'est-à-dire que l'état initial $f(x)$, qui est tel que

$$(40)\qquad V' = f(x'),\quad V'' = f(x''),\quad V''' = f(x'''),\ldots,$$

peut être une fonction très-discontinue. Dans tous les cas, les seconds membres des équations (39) seront complétement assignables, car chacun d'eux sera la somme des aires d'une suite de rectangles, ayant tous la base δ, et les hauteurs successives ($V'X'_i$, $V''X''_i$, $V'''X'''_i$,..). Les valeurs des coefficients données par le groupe (39) seront donc nettement déterminées, puisque les seconds facteurs des premiers membres ne sont autres que des intégrales (32).

§ CLXX.

VÉRIFICATION DE L'ÉTAT INITIAL.

On peut constater, maintenant, que ces valeurs des coefficients donneront au développement (33) la propriété de reproduire exactement l'état initial $f(x)$ entre les limites $-a$ et $+a$. Par l'introduction de différents termes, nuls

d'après l'identité (38), le groupe (39) peut être mis sous la forme

$$(41)\begin{cases} \mathrm{S}\left[M_0X_0^{(j)} + M_1X_1^{(j)} + M_2X_2^{(j)} + \ldots - V^{(j)}\right]X_0^{(j)}\delta = 0, \\ \mathrm{S}\left[M_0X_0^{(j)} + M_1X_1^{(j)} + M_2X_2^{(j)} + \ldots - V^{(j)}\right]X_1^{(j)}\delta = 0, \\ \mathrm{S}\left[M_0X_0^{(j)} + M_1X_1^{(j)} + M_2X_2^{(j)} + \ldots - V^{(j)}\right]X_2^{(j)}\delta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on ajoute toutes ces équations (41), respectivement multipliées par des constantes arbitraires (P_0, P_1, $P_2, \ldots$), et que l'on pose, pour simplifier,

$$(42)\qquad P_0X_0^{(j)} + P_1X_1^{(j)} + P_2X_2^{(j)} + \ldots = \Phi\left[x^{(j)}\right],$$

on aura l'équation unique

$$(43)\quad \mathrm{S}\left[M_0X_0^{(j)} + M_1X_1^{(j)} + M_2X_2^{(j)} + \ldots - V^{(j)}\right]\Phi\left[x^{(j)}\right]\delta = 0,$$

qui concentre, et peut remplacer le groupe (41), ou (39), par suite de l'indétermination complète des coefficients P_i, ou de la fonction Φ (42).

Or, si, ayant substitué aux $V^{(j)}$ leur valeurs $f[x^{(j)}]$ (40), on passe du signe (36) au signe (37), l'équation (43) n'est autre que celle-ci

$$(44)\quad \int_{-a}^{+a}[M_0X_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \ldots - f(x)]\,\Phi(x)\,dx = 0,$$

et comme elle est satisfaite, quelle que soit la fonction $\Phi(x)$, il en résulte, qu'entre les limites de l'intégrale, l'élément différentiel est nul partout. Cette conséquence, déduite de l'équation (43), qui représente à elle seule toutes les valeurs (39), établit donc, incontestablement,

qu'avec ces valeurs, on a identiquement

$$(45) \qquad M_0 X_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots = f(x)$$

tant que x reste compris entre $-a$ et $+a$.

D'après l'identité actuelle des signes (36) et (37), et les intégrales (32), le groupe (39) est résumé par la valeur générale

$$(46) \qquad M = \frac{1}{a} \frac{\mu + \mu'}{\lambda(\mu) + \lambda(\mu')} \int_{-a}^{+a} f(x)\, X\, dx.$$

Avec ce coefficient, l'état initial $f(x)$ est développé par la série (23), et la série (22) donne définitivement la fonction V, qui exprime la loi intégrale du refroidissement d'un mur solide, lorsque ses deux faces ont des conductibilités extérieures différentes l et l'.

Lorsque l'état initial f est une température constante prise pour unité, de l'intégrale indéfinie

$$\int X\, dx = -\frac{1}{m^2} \int \frac{d^2X}{dx^2} dx = -\frac{1}{m^2} \frac{dX}{dx},$$

et des valeurs (20) et (10) on déduit

$$(47) \qquad \int_{-a}^{+a} X\, dx = 2a \frac{\sin\mu + \sin\mu'}{\mu + \mu'},$$

fraction qui, divisée par le second membre de (32), détermine M; puis avec ce nouveau coefficient, V (22) devient particulièrement

$$(48) \qquad V = 2 \sum \frac{\sin\mu + \sin\mu'}{\lambda(\mu) + \lambda(\mu')} X e^{-m^2 \frac{t}{k}},$$

et donne, quand $t = 0$, la série trigonométrique très-générale

$$2 \sum \frac{\sin\mu + \sin\mu'}{\lambda(\mu) + \lambda(\mu')} X,$$

dont la valeur est constamment l'unité, tant que la variable x reste comprise entre $-a$ et $+a$.

§ CLXXI.

CAS DES FACES SIMILAIRES.

La loi intégrale du refroidissement d'un mur dont les faces sont similaires, ou ont le même pouvoir rayonnant, se déduit de la solution plus générale qui précède. Alors $l' = l$, d'où $\mu' = \mu$ (9); le complément ψ (10) se réduit à $\frac{i\pi}{2}$, et suivant que l'entier i est pair $(2i)$, ou impair $(2j+1)$, le facteur X (16) reste un cosinus, ou devient un sinus. Il convient de considérer, séparément, les deux cas; les lettres (X, m, μ) conservées pour le premier, étant remplacées par (Ξ, n, ν) pour le second, les deux facteurs distincts, et l'équation multiple qui régit le paramètre et son augment pour chacun d'eux, sont

$$(49) \quad \begin{cases} X = \cos mx, & ma = i\pi + \mu = \dfrac{al}{\tang \mu}, \\ \Xi = \sin nx, & na = j\pi + \dfrac{\pi}{2} + \nu = \dfrac{al}{\tang \nu}. \end{cases}$$

Les propriétés réciproques de ces facteurs résultent du théorème (26), qui donne les trois suivants

$$(50) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-a}^{+a} X_i X_{i'}\, dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a} \Xi_j \Xi_{j'}\, dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a} X_i \Xi_j\, dx = 0, \end{cases}$$

desquels le dernier est évident, puisque l'élément différentiel est une fonction impaire en x. D'un autre côté, le groupe (49) donne immédiatement

$$-\left(\frac{1}{m}\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_a = \left(\frac{1}{m}\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_{-a} = +\sin ma\cos ma,$$
$$-\left(\frac{1}{n}\Xi\frac{d\Xi}{dx}\right)_a = \left(\frac{1}{n}\Xi\frac{d\Xi}{dx}\right)_{-a} = -\sin na\cos na,$$

et l'on a, d'après l'intégrale définie (28),

$$(51)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathrm{X}^2 dx = \frac{ma+\sin ma\cos ma}{m}, \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a}\Xi^2 dx = \frac{na-\sin na\cos na}{n}. \end{cases}$$

La fonction V (22), actuellement composée de deux séries distinctes, est

$$(52)\qquad \mathrm{V} = \sum \mathrm{M}e^{-m^2\frac{t}{k}}\cos mx + \sum \mathrm{N}e^{-n^2\frac{t}{k}}\sin nx,$$

et la reproduction de l'état initial, quand $t = 0$, exigeant l'identité

$$(53)\qquad \sum \mathrm{M}\cos mx + \sum \mathrm{N}\sin nx = \mathrm{f}(x),$$

les théorèmes (50) permettent d'isoler chacun des coefficients M ou N, dont les valeurs générales sont

$$(54)\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{m\displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathrm{f}(x)\cos mx\,dx}{ma+\sin ma\cos ma}, \\ \mathrm{N} = \dfrac{n\displaystyle\int_{-a}^{+a}\mathrm{f}(x)\cos nx\,dx}{na-\sin na\cos na}, \end{cases}$$

d'après les intégrales (51). Avec ces coefficients, l'état initial f (x) est développé par la série (53), et la série (52) donne la fonction V, qui exprime la loi intégrale du refroidissement d'un mur solide, lorsque ses deux faces ont le même pouvoir émissif ε, ou la même conductibilité extérieure l.

§ CLXXII.

VARIÉTÉS DE L'ÉTAT INITIAL.

Dans ce cas des faces similaires, quand l'état initial apporte une symétrie calorifique, soit directe, soit inverse, par rapport au plan moyen $(x = 0)$, cette symétrie se conserve pendant toute la durée du refroidissement. En effet, si f (x) est une fonction paire, ou impaire, en x, le coefficient N, ou M (54), disparaît par son intégrale alors composée d'éléments qui se détruisent; et les termes aux coefficients M, ou N, existant seuls dans la série (52), la fonction V est aussi paire, ou impaire, quelle que soit l'époque t.

Généralement, l'état initial se compose de deux parties,

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{I}(x), \tag{55}$$

la première paire en x, et la seconde impaire. Alors les termes de la série (53) aux coefficients M, ou aux fonctions simples $\cos mx$, développent la partie paire, et ceux aux coefficients N, ou aux fonctions simples $\sin nx$, développent la partie impaire; car on peut réduire f (x), à P (x) seul dans l'élément de l'intégrale (54) pour M, à I (x) seul dans l'intégrale pour N, la partie complémentaire s'annulant dans les deux cas. A l'aide des mêmes réductions, la première partie de la série (52) exprime la température variable du mur, avec une symétrie directe apportée par

P(x), la seconde exprime la température variable du même corps, avec une symétrie inverse apportée par I(x). Et la somme de ces températures partielles donne la température V, qui résulte de l'état initial composé (55).

Si le mur a primitivement, et dans toute son étendue, une même température prise pour unité, alors

$$f(x) = f(-x) = 1 = P(x);$$

N (54) est nul, on a $(2 \sin ma)$ pour le numérateur de M; la fonction V (52) devient

$$(56) \qquad V = 2 \sum \frac{\sin ma}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{k}} \cos mx,$$

et donne, quand $t = 0$, une série trigonométrique particulière, dont la valeur est constamment l'unité, lorsque x reste compris entre $-a$ et $+a$.

Si la première partie du mur, comprise entre les plans $(x = +a, x = 0)$, a primitivement la température $+1$, et la seconde moitié la température -1, alors

$$f(x) = -f(-x) = 1 = I(x);$$

M (54) est nul, on a $(1 - \cos na)$ pour la moitié du numérateur de N; la fonction V (52) est

$$(57) \qquad V = 2 \sum \frac{(1 - \cos na)}{na - \sin na \cos na} e^{-n^2 \frac{t}{k}} \sin nx$$

et donne, quand $t = 0$, une seconde série trigonométrique dont la valeur est, constamment $+1$ de $x = 0$ à $x = +a$, -1 de $x = -a$ à $x = 0$.

Dans ces deux exemples, si la valeur absolue des températures constantes primitives était C, au lieu de l'unité, les solutions ne différeraient des précédentes, que par le facteur placé en dehors des séries (56) et (57), et qui serait 2C

au lieu de 2. Supposons cette modification faite. Si la première moitié du mur est primitivement à la température 1, et la seconde à la température zéro, l'état initial est alors la superposition, d'une symétrie directe (56), et d'une symétrie inverse (57), avec la même constante $C = \frac{1}{2}$: car on a, $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, et $f(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Donc, avec l'état initial ainsi composé, la fonction V (52) devient

$$(58) \qquad V = \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{\sin ma \cos mx}{ma + \sin ma \cos ma} e^{-m^2 \frac{t}{k}} \\ + & \sum \frac{(1 - \cos na) \sin nx}{na - \sin na \cos na} e^{-n^2 \frac{t}{k}} \end{aligned} \right.$$

et donne, quand $t = 0$, une troisième série trigonométrique, dont la valeur est $+1$ de $x = 0$ à $x = +a$, et zéro de $x = -a$ à $x = 0$.

§ CLXXIII.

VARIÉTÉS DU POUVOIR ÉMISSIF.

A chaque valeur de la conductibilité extérieure l, comprise entre zéro et l'infini, correspond un groupe distinct de fonctions V (52), et de développements des $P(x)$, $I(x)$, $f(x)$. La limite supérieure, $l = \infty$, est atteinte, quand les deux faces du mur sont en contact avec une source constante à zéro; alors μ et ν (49) sont égaux à $\frac{\pi}{2}$; d'où, en remplaçant $(j+1)$ par j, $m = \frac{2i+1}{2a}\pi$, $n = \frac{j\pi}{a}$; chaque coefficient (54) se réduit à son intégrale, divisée par a; là, les développements en séries, des $P(x)$ sont en $\cos \frac{2i+1}{2a} \pi x$,

des $I(x)$ en $\sin j\pi\frac{x}{a}$. La limite inférieure, $l=0$, a lieu, quand les deux faces du mur sont imperméables, ou sans flux; alors μ et ν (49) sont nuls; d'où, $m=\frac{i\pi}{a}$, $n=\frac{2j+1}{2a}\pi$; chaque coefficient (54) se réduit encore à son intégrale divisée par a, mais à l'exception de

$$M_0=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx,$$

coefficient correspondant à $i=0$, dont le dénominateur est $2a$, et qui donne la température finale du mur, quand sa chaleur initiale s'est répartie uniformément dans toute son étendue; ici, les développements en séries, des $P(x)$ sont en $\cos i\pi\frac{x}{a}$, des $I(x)$ en $\sin\frac{2j+1}{2a}\pi x$.

Lors des deux conductibilités extérieures différentes l et l', on pourrait aussi considérer, séparément, les facteurs, paramètres, et augments, pour i pair $(2i)$, et pour i impair $(2j+1)$; les lettres (X, m, μ, μ') conservées pour les premiers, étant remplacées par (Ξ, n, ν, ν') pour les seconds, la première expression (16), en y substituant à μ sa valeur $(i\pi+\mu)$, et chassant par développement l'arc $\frac{i\pi}{2}$, donnerait alors les deux fonctions distinctes

$$X=\cos\left(mx+\frac{\mu-\mu'}{2}\right),\qquad \Xi=\sin\left(nx+\frac{\nu-\nu'}{2}\right),$$

en écartant l'ambiguïté des signes. Mais tant que l' ne serait pas égal à l, et conséquemment μ' à μ, et ν' à ν, la différence dans les formes des fonctions précédentes, ne signalant pas une différence dans leurs parités, cette distinction introduirait une complication, qui ne serait com-

pensée par aucun avantage. Conservant donc la solution indivise, dans le cas des faces hétérogènes, à chaque couple de valeurs des conductibilités l, l', comprises entre zéro et l'infini, correspondra un groupe de fonctions V (22), et de développements de $f(x)$ (23); et le nombre de ces groupes sera, en quelque sorte, doublement infini.

Mais, si l et l' atteignaient à la fois leur limite supérieure, ou inférieure, on rentrerait dans le cas des faces similaires. Et, il en serait de même : 1° si l' était seul, ou nul, ou infini; 2° si l' étant nul, l était infini; 3° si l' étant infini, l était nul. Car le mur, d'épaisseur $2a$, serait alors identique avec la moitié d'un mur à faces similaires, d'épaisseur $4a$, dans lequel l'état initial apporterait une symétrie calorifique, ou inverse, ou directe, par rapport au plan moyen; et l'on passerait de l'un à l'autre, par un simple déplacement de l'origine de la coordonnée x, sauf à remplacer ensuite $2a$ par a.



DIX-HUITIÈME LEÇON.

PRISME RECTANGLE RAYONNANT. — LOIS GÉNÉRALES.

Refroidissement d'un prisme rectangle, dont toutes les faces rayonnent inégalement. — Solution générale du refroidissement par rayonnement d'un polyèdre quelconque. — Cas d'un prisme droit. — Lois intégrales des facteurs simples. — Rapport des flux partiels.

---

§ CLXXIV.

MURS ORTHOGONAUX.

La loi intégrale du refroidissement par rayonnement, d'un prisme rectangle, soit indéfini, soit limité, lorsque toutes ses faces ont des conductibilités extérieures différentes, se déduit, comme un simple corollaire, de la solution du mur aux faces hétérogènes, que résume le tableau suivant :

I.

$$\frac{d^2X}{dx^2}+m^2X=0,\quad \left(\frac{dX}{dx}+lX\right)_a=0,\quad \left(\frac{dX}{dx}-l'X\right)_{-a}=0,$$

$$\frac{al}{\operatorname{tang}\mu}=\frac{al'}{\operatorname{tang}\mu'}=am=\frac{\dot\mu+\dot\mu'}{2},\quad X=\cos\left(mx+\frac{\dot\mu-\dot\mu'}{2}\right),$$

$$\dot\mu=i\pi+\mu,\quad \lambda(\varphi)=\varphi+\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\int_{-a}^{+a}XX'\,dx=0,\quad \int_{-a}^{+a}X^2\,dx=a\,\frac{\lambda(\dot\mu)+\lambda(\dot\mu')}{\dot\mu+\dot\mu'}=\frac{a}{\mathcal{L}},$$

$$M=\frac{\mathcal{L}}{a}\int_{-a}^{+a}f(x)X\,dx,\qquad V_x=\sum MXe^{-m^2\frac{t}{k}}.$$

La première ligne réunit les conditions imposées au facteur X; la seconde donne sa valeur, précédée de l'équatión multiple qui détermine le paramètre m, à l'aide de l'entier i et des augments μ et μ'; la troisième rappelle la valeur de $\dot{\mu}$, et la signification du symbole $\lambda(\varphi)$. La quatrième ligne énonce les propriétés générales des facteurs X, savoir: le théorème fondamental (26) du § CLXVII, et son intégrale (32), dont le facteur trigonométrique fractionnaire est représenté, pour simplifier, par $\frac{1}{\mathcal{A}}$. Enfin, la dernière ligne donne, avec le coefficient M, la série V_x qui exprime, à l'aide des facteurs X, le refroidissement du mur, dont les faces $(x = +a, x = -a)$, perpendiculaires aux x, ont des conductibilités extérieures différentes l et l'.

Si l'on substitue, dans le tableau I, aux lettres rangées sur la première ligne du groupe

$$\left\{\begin{matrix}[X, & x, & a, & l, & m, & \mu, & i, & \mathcal{A}] \\ [Y, & y, & b, & h, & n, & \nu, & i', & \mathcal{B}] \\ [Z, & z, & c, & g, & p, & \rho, & i'', & \mathcal{C}]\end{matrix}\right.$$

les lettres correspondantes de la seconde ligne, puis celles de la troisième, on écrit les deux nouveaux tableaux

II.

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + n^2Y = 0, \quad \left(\frac{dY}{dy} + hY\right)_b = 0, \quad \left(\frac{dY}{dy} - h'Y\right)_{-b} = 0,$$

$$\frac{bh}{\operatorname{tang}\nu} = \frac{bh'}{\operatorname{tang}\nu'} = bn = \frac{\dot{\nu} + \nu'}{2}, \quad Y = \cos\left(ny + \frac{\dot{\nu} - \nu'}{2}\right),$$

$$\dot{\nu} = i'\pi + \nu,$$

$$\int_{-b}^{+b} YY'\,dy = 0, \quad \int_{-b}^{+b} Y^2\,dy = b\,\frac{\lambda(\dot{\nu}) + \lambda(\nu')}{\dot{\nu} + \nu'} = \frac{b}{\mathcal{B}};$$

$$M = \frac{\mathcal{B}}{b}\int_{-b}^{+b} f(y)\,Y\,dy, \qquad V_y = \sum MYe^{-n^2\frac{t}{k}}.$$

III.

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+p^2Z=0,\ \left(\frac{dZ}{dz}+gZ\right)_c=0,\ \left(\frac{dZ}{dz}-g'Z\right)_{-c}=0,$$

$$\frac{cg}{\tang \rho}=\frac{cg'}{\tang \rho'}=cp=\frac{\dot\rho+\rho'}{2},\ Z=\cos\left(pz+\frac{\dot\rho-\rho'}{2}\right),$$

$$\dot\rho=i''\pi+\rho,$$

$$\int_{-c}^{+c}ZZ'\,dz=0,\quad \int_{-c}^{+c}Z^2dz=c\,\frac{\lambda(\dot\rho)+\lambda(\rho')}{\dot\rho+\rho'}=\frac{c}{\mathfrak{S}},$$

$$M=\frac{\mathfrak{S}}{c}\int_{-c}^{+c}f(z)Z\,dz,\quad V_z=\sum MZe^{-p^2\frac{t}{k}}.$$

dans lesquels, la série V_y (tableau II) exprime, à l'aide des facteurs Y, le refroidissement d'un second mur, dont les faces perpendiculaires aux y, $(y=+b, y=-b)$, ont des conductibilités extérieures h, h'; et la série V_z (tableau III) exprime, à l'aide des facteurs Z, le refroidissement d'un troisième mur, dont les faces $(z=+c,\ z=-c)$, perpendiculaires aux z, ont des facultés rayonnantes g, g'.

§ CLXXV.

POUTRE A QUATRE FACES RAYONNANTES.

Cela posé, s'il s'agit d'exprimer la loi intégrale du refroidissement d'une poutre indéfinie, dont les quatre faces

$$(1)\qquad \begin{cases} x=+a, & \text{et}\quad x=-a,\\ y=+b, & \text{et}\quad y+-b,\end{cases}$$

ont respectivement les conductibilités extérieures différentes l et l', h et h', lorsque l'état initial f ne dépend que de

(x, y), les conditions analytiques sont

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dV}{dx} + lV\right)_a = 0, & \left(\dfrac{dV}{dx} - l'V\right)_{-a} = 0, \\ \left(\dfrac{dV}{dy} + hV\right)_b = 0, & \left(\dfrac{dV}{dy} - h'V\right)_{-b} = 0, \\ & V_{t=0} = f(x, y), \\ & \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{d^2V}{dy^2} = k\,\dfrac{dV}{dt}. \end{cases}$$

Savoir : les quatre équations à la surface, celle de l'état initial, et l'équation générale qui régit la fonction V, laquelle fonction ne dépend que de (x, y, t) ; car tous les points situés sur une même parallèle à l'axe de la poutre, étant identiques, et par leur position, et par l'état initial, le seront encore à toute époque.

Chaque terme simple a pour expression

$$(3)\qquad V_1 = XYe^{-(m^2+n^2)\frac{t}{k}},$$

X et Y étant les facteurs définis aux tableaux I et II. Car la fonction V_1 (3) vérifie : 1° l'équation générale (2), d'après les relations différentielles qui commencent ces tableaux ; 2° les conditions des faces $(x = +a, x = -a)$ par X, d'après les deux dernières équations de la première ligne du tableau I ; 3° les conditions des faces $(y = +b, y = -b)$ par Y, d'après les équations homologues du tableau II.

La fonction intégrale V prend la forme

$$(4)\qquad V = \sum MXYe^{-(m^2+n^2)\frac{t}{k}}$$

d'une série double, s'étendant à tous les termes simples (3), ou à toutes les valeurs des entiers i, i'. L'introduction de

l'état initial, pour $t = 0$, conduit à l'identité nécessaire

$$(5) \qquad \sum MXY = f(x, y).$$

On isole chaque coefficient M, à l'aide du facteur $XY\,dx\,dy$, par la double intégration de $x = -a$ à $x = +a$, de $y = -b$ à $y = +b$, qui fait disparaître tous les autres coefficients, d'après les premières propriétés énoncées aux quatrièmes lignes I et II, et l'on a, d'après les secondes,

$$(6) \qquad M = \frac{\text{[illegible]}}{ab} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} f(x, y)\, XY\, dx\, dy.$$

Telle est la valeur générale du coefficient M, qui rend le premier membre de (5) identique au second, tant que x reste compris entre $-a$ et $+a$, y entre $-b$ et $+b$, et qui détermine la loi intégrale (4) du refroidissement de la poutre, par le rayonnement inégal de ses quatre faces.

§ CLXXVI.

PRISME RECTANGLE RAYONNANT.

S'il s'agit d'exprimer le refroidissement d'un prisme rectangle dont les six faces

$$(7) \qquad \begin{cases} x = +a, \text{ et } x = -a, \\ y = +b, \text{ et } y = -b, \\ z = +c, \text{ et } z = -c, \end{cases}$$

ont respectivement les conductibilités extérieures l et l',

h et h', g et g', les conditions analytiques sont

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}+\dfrac{d^2V}{dz^2}=k\,\dfrac{dV}{dt}, \\ \left(\dfrac{dV}{dx}+l\mathrm{V}\right)_a=0,\quad \left(\dfrac{dV}{dx}-l'\mathrm{V}\right)_{-a}=0, \\ \left(\dfrac{dV}{dy}+h\mathrm{V}\right)_b=0,\quad \left(\dfrac{dV}{dy}-h'\mathrm{V}\right)_{-b}=0, \\ \left(\dfrac{dV}{dz}+g\mathrm{V}\right)_c=0,\quad \left(\dfrac{dV}{dz}-g'\mathrm{V}\right)_{-c}=0, \\ \mathrm{V}_{t=0}=\mathrm{f}(x,y,z). \end{array}\right.$$

Le terme simple a pour expression

$$(9)\qquad \mathrm{V}_1=\mathrm{XYZ}e^{-(m^2+n^2+p^2)\frac{t}{k}},$$

X, Y, Z, étant les facteurs définis aux trois tableaux du § CLXXIV. L'intégrale V a la forme

$$(10)\qquad \mathrm{V}=\sum\sum\sum \mathrm{MXYZ}e^{-(m^2+n^2+p^2)\frac{t}{k}},$$

d'une série triple, s'étendant à toutes les valeurs des entiers (i, i', i''). L'état initial exige l'identité

$$(11)\qquad \sum\sum\sum \mathrm{MXYZ}=\mathrm{f}(x,y,z),$$

et l'on isole chaque coefficient M à l'aide du facteur $\mathrm{XYZ}\,dx\,dy\,dz$, par la triple intégration de $x=-a$ à $x=+a$, de $y=-b$ à $y=+b$, de $z=-c$ à $z=+c$; ce qui donne définitivement

$$(12)\qquad \mathrm{M}=\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}{abc}\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\mathrm{f}(x,y,z)\,\mathrm{XYZ}\,dx\,dy\,dz.$$

Telle est la valeur générale du coefficient M, qui établit l'identité (11), pour tous les points intérieurs du prisme rectangle, et qui détermine l'expression (10) de son refroidissement, lors du rayonnement inégal de ses six faces.

§ CLXXVII.

VARIÉTÉS ET VÉRIFICATION.

Si l'état initial f est le produit de trois facteurs $f_x\, f_y\, f_z$, ne variant chacun qu'avec l'une des coordonnées, le coefficient M (12) est lui-même le produit des trois coefficients des tableaux du § CLXXIV, et la température du prisme rectangulaire devient

$$(13) \qquad V = V_x . V_y . V_z,$$

ou le produit des températures des trois murs orthogonaux dont il fait partie. Ce qui généralise une propriété signalée au § LXII. L'expression (13) s'applique particulièrement au cas où le prisme a primitivement la même température dans toute son étendue ; cette température initiale étant prise pour unité, les trois V_u facteurs deviennent alors des séries homologues de la série (48), § CLXX.

On peut attribuer, successivement et séparément, aux six conductibilités extérieures (l, l', h, h', g, g') toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini. D'où résultera un nombre prodigieux de groupes, distincts, de fonctions (10) et de développements (11), qui ne pourront donner lieu à aucun doute. Car la méthode d'interpolation du § CLXVIII, et la vérification du § CLXX, s'appliquent, comme il suit, à l'établissement direct de l'identité (11).

Pour cela, ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$) désignant respectivement les

nombres des facteurs admissibles (X, Y, Z), (∂, ∂', ∂'') les éléments linéaires $\left(\frac{2a}{\mathfrak{N}}, \frac{2b}{\mathfrak{N}'}, \frac{2c}{\mathfrak{N}''}\right)$, le prisme rectangle se trouve divisé en $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'\mathfrak{N}''$ parties égales à $\partial\partial'\partial''$. Avec les températures initiales, et les coordonnées, des centres de tous ces parallélipipèdes élémentaires, on forme un nombre $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'\mathfrak{N}''$ d'équations égal à celui des coefficients à déterminer. Puis, quand les nombres ($\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}''$) reprennent leurs véritables grandeurs, les propriétés reconnues des (X, Y, Z) permettent d'isoler et d'évaluer chaque coefficient, à l'aide de la méthode des facteurs.

On a ainsi un nouveau groupe de $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'\mathfrak{N}''$ équations distinctes à une seule inconnue, qui peut remplacer le premier, dont il est déduit, et qui se concentre, comme au § CLXX, dans une seule équation. Cette équation exprime que *zéro* est la valeur d'une intégrale définie triple, ayant les limites du prisme, et dont l'élément différentiel est le produit, d'une fonction arbitraire, par l'excès du second membre de (11), sur le premier composé avec les coefficients évalués. D'où résulte nécessairement que le dernier facteur est toujours nul entre les limites de l'intégrale; c'est-à-dire que le premier membre de (11), écrit avec les coefficients trouvés, donne identiquement la même valeur que le second, pour tous les points intérieurs du polyèdre.

§ CLXXVIII.

SOLUTION POUR UN POLYÈDRE QUELCONQUE.

Traitée généralement, la question du refroidissement d'un corps solide, par le rayonnement de toute sa surface, conduit à des lois intégrales, qu'il importe de signaler. La

fonction V de (x, y, z, t) étant régie par les équations

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{d^2V}{dy^2} + \dfrac{d^2V}{dz^2} = k\,\dfrac{dV}{dt}, \\ \left(\dfrac{dV}{dx}\cos\xi + \dfrac{dV}{dy}\cos\eta + \dfrac{dV}{dz}\cos\zeta + l\,V\right)_\sigma = 0, \\ V_0 = F(x, y, z), \end{cases}$$

chaque terme simple a la forme

$$(15)\qquad V_1 = U e^{-\Theta^2 \frac{t}{k}},$$

le facteur U, fonction de (x, y, z), et la constante Θ^2, vérifiant le groupe

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{d^2U}{dy^2} + \dfrac{d^2U}{dz^2} + \Theta^2 U = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dx}\cos\xi + \dfrac{dU}{dy}\cos\eta + \dfrac{dU}{dz}\cos\zeta + l\,U\right)_\sigma = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première de ces équations (16) par $F\,dx\,dy\,dz$, F étant une fonction quelconque de (x, y, z), et qu'on intègre ensuite dans toute l'étendue du corps, en suivant absolument la même marche qu'au § LVIII, et employant les mêmes signes, $\int_\varpi$ pour la sommation dans le volume du corps, $\int_\sigma$ pour celle faite à la surface (dont aucune partie n'est en contact avec une source constante de chaleur ou de froid), on arrive à l'équation finale

$$(17)\quad \Theta^2 \int_\varpi d\varpi . UF = \int_\sigma d\sigma . lUF + \int_\varpi d\varpi \left(\frac{dU}{dx}\frac{dF}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dF}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dF}{dz}\right)$$

à l'aide de la seconde (16).

Cette équation (17) résume, en quelque sorte, les pro-

priétés intégrales des facteurs U. D'abord, si la fonction F est un second facteur U', qui vérifie le groupe (16) avec une constante Θ'^2 autre que Θ^2, le second membre de (17) est symétrique en U et U'. De là résulte qu'en multipliant par U $dxdydz$ la première (16) écrite en (U', Θ'^2), pour l'intégrer dans le volume ϖ, on arrivera de la même manière à une nouvelle équation finale, qui ne différera de celle (17), en F = U', que par le facteur Θ'^2 au premier membre, au lieu de Θ^2. On a donc

(18) $$\int_\varpi d\varpi . UU' = 0$$

quand la constante Θ'^2 diffère de Θ^2, ou U' de U.

Cette conséquence de l'équation (17) est seule nécessaire pour achever la solution. Car l'intégrale générale

(19) $$V = \mathbf{S}\, MUe^{-\Theta^2 \frac{t}{k}},$$

qui réunit tous les termes simples admissibles (15), se réduisant à $\mathbf{S}$ MU quand $t = 0$, il faut que ce développement reproduise l'état initial f; et ce problème d'interpolation se résout à l'aide du théorème (18), qui permet d'isoler successivement tous les coefficients, et qui donne pour leur valeur générale

(20) $$M = \frac{\int_\varpi d\varpi . fU}{\int_\varpi d\varpi\ U^2}.$$

§ CLXXIX.

THÉORÈME VÉRIFICATEUR.

Mais, l'équation (17) conduit à d'autres thorèmes, par

exemple, si la fonction F est une constante, cette équation donne

$$(21) \qquad \Theta^2 \int_{\varpi} d\varpi . U = \int_{\sigma} d\sigma . lU.$$

C'est-à-dire que tout facteur U jouit de cette propriété, que, si d'une part, on multiple par la constante Θ^2 la somme de toutes ses valeurs à l'intérieur du corps, et si d'autre part, on fait la somme des seules valeurs appartenant aux points de la surface, respectivement multipliées par la conductibilité extérieure l aux mêmes points, les deux résultats obtenus seront identiquement égaux.

Ce nouveau théorème complète la solution trouvée en la vérifiant; car il constate que le corps perd, pendant toute la durée de son refroidissement, une quantité de chaleur précisément égale à l'excès qu'il possédait primitivement. En effet, dans le cas simple où l'état initial f est un facteur U, l'excès de chaleur primitif a pour expression

$$(22) \qquad \Gamma\Delta \int_{\varpi} d\varpi . U,$$

et, la température variable étant V_1 (15), la quantité totale de chaleur perdue par le rayonnement est

$$\int_0^{\infty} dt . e^{-\Theta^2 \frac{t}{k}} . \int_{\sigma} d\sigma . \varepsilon U_{\sigma}$$

ou bien, l'intégrale définie par rapport au temps ayant pour valeur le quotient de k, ou de $\frac{\Gamma\Delta}{q}$, par Θ^2, et le quotient du pouvoir émissif ε par q donnant l, plus simplement

$$(23) \qquad \frac{\Gamma\Delta}{\Theta^2} \int_{\sigma} d\sigma . lU_{\sigma}.$$

Or, ces deux quantités de chaleur (22) et (23) sont égales, d'après le théorème (21). Et si l'état initial développé est $\mathbf{S}$ MU, et l'état variable V (19), évaluant l'excès primitif et la perte par rayonnement, leur différence

$$(24)\qquad \Gamma\Delta \mathbf{S} \mathrm{M}\left(\int_{\varpi} d\varpi . \mathrm{U} - \frac{\int_{\sigma} d\sigma . l \mathrm{U}_{\sigma}}{\Theta^2}\right)$$

sera nulle, terme par terme, d'après le même théorème.

L'égalité (21) s'étend au cas où le polyèdre a plusieurs faces imperméables, et pour lesquelles l est nul. Mais, elle n'a pas lieu s'il existe des faces où l est infini. Car si, outre sa partie rayonnante σ, la surface en contient une autre σ', entretenue à la température zéro, le groupe (16) comprend une troisième condition ($\mathrm{U}_{\sigma'} = 0$), et, avec la fonction quelconque F, l'équation finale (17) contient, dans son second membre, ce troisième terme

$$-\int_{\sigma'} d\sigma' \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\cos\xi + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\cos\eta + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\cos\zeta\right).\mathrm{F},$$

qui, s'annulant, par $\mathrm{U}'_{\sigma'} = 0$, quand F est un facteur U', ne change rien au premier théorème (18), mais qui change, au contraire, le second membre de l'équation (21), quand F est une constante.

§ CLXXX.

APPLICATION AU PRISME RECTANGLE.

Lors du refroidissement du prisme rectangle, par le rayonnement de ses six faces, le théorème (21) existe pour chaque terme simple (9). En effet, les trois conditions qui

régissent le facteur X (§ CLXXIV, tableau I, première ligne), donnent

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2\int_{-a}^{+a} \mathrm{X}\,dx &= \left[-\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right]_{-a}^{+a} = -\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)_{-a} \\ &= l\mathrm{X}_a + l'\mathrm{X}_{-a}, \end{aligned} \right.$$

et, avec celles qui régissent les facteurs Y et Z, on complète le groupe

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2\int_{-a}^{+a} \mathrm{X}\,dx &= l\mathrm{X}_a + l\mathrm{X}_{-a}, \\ n^2\int_{-b}^{+b} \mathrm{Y}\,dy &= h\mathrm{Y}_b + h'\mathrm{Y}_{-b}, \\ p^2\int_{-c}^{+c} \mathrm{Z}\,dz &= g\mathrm{Z}_c + g'\mathrm{Z}_{-c} \end{aligned} \right.$$

qui donne, pour la somme $(m^2 + n^2 + p^2)$ ou pour la constante Θ^2

$$(27)\quad \Theta^2 = \frac{l\mathrm{X}_a + l'\mathrm{X}_{-a}}{\int_{-a}^{+a} \mathrm{X}\,dx} + \frac{h\mathrm{Y}_b + h'\mathrm{Y}_{-b}}{\int_{-b}^{+b} \mathrm{Y}\,dy} + \frac{g\mathrm{Z}_c + g'\mathrm{Z}_{-c}}{\int_{-c}^{+c} \mathrm{Z}\,dz}:$$

égalité qui, les dénominateurs étant chassés, reproduit le théorème (21).

Il y a plus. Dans le cas simple de l'état initial $f = \mathrm{XYZ}$, et de l'état variable V_1 (9), si, considérant deux époques t' et t'', on évalue, séparément, les trois quantités de chaleur qui s'écoulent, pendant le temps $(t'' - t')$, par les trois couples de faces parallèles du prisme rectangle, désignant par $(\mathrm{S}_x, \mathrm{S}_y, \mathrm{S}_z)$ les dénominateurs (27), on trouve, sans peine, qu'elles sont égales aux seconds membres (26) multipliés, respectivement par $(\mathrm{S}_y\mathrm{S}_z, \mathrm{S}_z\mathrm{S}_x, \mathrm{S}_x\mathrm{S}_y)$, et tous

par le facteur commun

$$\Gamma\Delta \frac{e^{-\Theta^2\frac{t'}{k}} - e^{-\Theta^2\frac{t''}{k}}}{\Theta^2}.$$

D'où résulte, d'après les équations (26), que ces flux sont entre eux :: $m^2 : n^2 : p^2$. C'est-à-dire qu'ils sont proportionnels aux carrés des paramètres (m, n, p), et cela, quelles que soient les époques, quel que soit leur intervalle.

§ CLXXXI.

SOLUTION POUR UN PRISME DROIT.

Les propriétés générales qui viennent d'être établies, se transforment d'une manière spéciale, lorsqu'il s'agit d'exprimer la loi intégrale du refroidissement d'un prisme droit, dont les bases $(z = +c,\ z = -c)$ et les faces parallèles à l'axe sont toutes rayonnantes. La fonction V est alors régie par le groupe

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = k\frac{dV}{dt},\\ &\left(\frac{dV}{dz} + gV\right)_c = 0, \quad \left(\frac{dV}{dz} - g'V\right)_{-c} = 0,\\ &\left(\frac{dV}{dx}\cos\xi + \frac{dV}{dy}\cos\eta + lV\right)_\omega = 0,\\ &V_{t=0} = f(x, y, z);\end{aligned}\right.$$

où la troisième ligne représente l'équation à la surface latérale, dont le périmètre est ω, et dont la normale est partout perpendiculaire aux z. Avec la constante

$$(29)\qquad \Theta^2 = \tau^2 + \theta^2,$$

et le facteur Z du tableau III, § CLXXIV, dont nous désignerons le paramètre par τ au lieu de p, tout terme simple prend la forme

$$V_1 = uZe^{-(\tau^2+\theta^2)\frac{t}{k}} \qquad (30)$$

le facteur u, fonction de (x, y), vérifiant le groupe partiel

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} + \theta^2 u = 0, \\ \left(\dfrac{du}{dx}\cos\xi + \dfrac{du}{dy}\cos\eta + lu\right)_\omega = 0. \end{array}\right. \qquad (31)$$

Outre les signes $\int_\varpi$ désignant toujours l'intégration dans le volume, et celui $\int_\sigma$ restreint actuellement à la sommation sur la base σ, introduisons le troisième signe $\int_\omega$, pour indiquer l'intégration faite sur le périmètre ω de cette base. Le théorème général (18), en remplaçant, U par uZ, U' par $u'Z'$, $\int_\varpi d\varpi\ldots$ par $\int_{-c}^{+c} dz \int_\sigma d\sigma\ldots$, se dédouble (suivant que, u' étant égal à u, Z' diffère de Z, ou que, Z' étant égal à Z, u' diffère de u) dans les deux théorèmes particuliers

$$\int_{-c}^{+c} ZZ'\,dz = 0, \quad \int_\sigma d\sigma . uu' = 0, \qquad (32)$$

desquels le premier existait déjà au tableau cité, et qui déterminent les coefficients de la fonction intégrale

$$V = \mathsf{S}\, MuZe^{-(\tau^2+\theta^2)\frac{t}{k}}, \qquad (33)$$

en déduisant leur valeur générale

$$(34) \qquad M = \frac{\int_{-c}^{+c} dz \int_{\sigma} d\sigma . \text{f} u Z}{\int_{-c}^{+c} Z^2 dz \int_{\sigma} d\sigma . u^2}$$

de l'identité nécessaire du développement $\mathbf{S}$ MuZ, et de l'état initial f.

§ CLXXXII.

VÉRIFICATION. RAPPORT DES FLUX.

L'égalité (21), écrite avec les paramètres, les facteurs, et les signes nouveaux, devient d'abord

$$(35) \quad \begin{cases} (\tau^2 + \theta^2) \int_{-c}^{+c} Z dz . \int_{\sigma} d\sigma . u = \\ = (g Z_c + g' Z_{-c}) \int_{\sigma} d\sigma . u + \int_{-c}^{+c} Z dz . \int_{\omega} d\omega . l u_{\omega}, \end{cases}$$

et puisque, comme au groupe (26), on a

$$(36) \qquad \tau^2 \int_{-c}^{+c} Z dz = g Z_c + g' Z_{-c},$$

elle se réduit ensuite à

$$(37) \qquad \theta^2 \int_{\sigma} d\sigma . u = \int_{\omega} d\omega . l u_{\omega} .$$

C'est-à-dire que tout facteur u, vérifiant avec la constante θ^2 le groupe (31), jouit de cette propriété que, si d'une part on multiplie par θ^2 la somme de toutes ses valeurs sur la

base σ, et si d'autre part on fait la somme des seules valeurs appartenant aux points du périmètre ω, respectivement multipliées par la conductibilité extérieure l aux mêmes points, les deux résultats obtenus sont identiquement égaux. Théorème spécial, qui suffit à la vérification de la solution trouvée, car la différence (24), étant aussi transformée, se réduit, par l'égalité (36), à

$$(38) \qquad \Gamma\Delta \, \mathsf{S} \, \mathrm{M} \int_{-c}^{+c} \mathrm{Z} dz \left(\frac{\theta^2 \int_\sigma d\sigma . u - \int_\omega d\omega . lu^\omega}{\tau^2 + \theta^2} \right),$$

et s'annule, terme par terme, d'après ce théorème (37).

En outre, si, dans le cas simple de l'état initial $\mathrm{f} = u\mathrm{Z}$, et de l'état variable V_1 (30), on considère deux époques t' et t'', on trouve facilement que les quantités de chaleur qui s'écoulent, pendant le temps $(t'' - t')$, par les deux bases réunies, et par la paroi latérale, sont respectivement égales aux deux parties du second membre de l'équation (35), multipliées par le facteur commun

$$\Gamma\Delta \frac{e^{-\left(\tau^2 + \theta^2\right)\frac{t'}{k}} - e^{-\left(\tau^2 + \theta^2\right)\frac{t''}{k}}}{\tau^2 + \theta^2}.$$

Le rapport des deux flux est donc indépendant des époques et de leur intervalle. Mais, de plus, les égalités (36) et (37) le réduisent à $\left(\frac{\tau}{\theta}\right)^2$: c'est-à-dire au rapport des carrés des deux paramètres (τ et θ). Résultat qui, rapproché de son homologue, dans la solution du prisme rectangle § CLXXX, semble indiquer cette loi générale, que les flux de chaleur, correspondant aux divers facteurs d'un terme simple, sont proportionnels aux carrés des paramètres de ces facteurs.

§ CLXXXIII.

CAS D'UN PRISME INDÉFINI.

L'interprétation physique de l'égalité (37) devient plus précise, quand on exprime le refroidissement du prisme indéfini, de base σ, de périmètre ω, par le rayonnement de sa paroi latérale, lorsque son état initial, constant sur une même parallèle à l'axe, pris pour celui des z, ne dépend que de (x, y). La fonction V, de (x, y, t) seulement, est régie par les équations

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = k\frac{dV}{dt}, \\ &\left(\frac{dV}{dx}\cos\xi + \frac{dV}{dy}\cos\eta + lV\right)_\omega = 0, \\ &V_0 = f(x, y); \end{aligned}\right.$$

composée avec les facteurs et les constantes (u, θ^2) du groupe (31), son intégrale a la forme

$$(40)\qquad V = \mathbf{S}\, Mue^{-\theta^2\frac{t}{k}},$$

et reproduit f, quand $t=0$, avec le coefficient

$$(41)\qquad M = \frac{\int_\sigma d\sigma . fu}{\int_\sigma d\sigma . u^2}.$$

Si l'on considère, alors, une portion du prisme indéfini, comprise entre deux sections parallèles dont la distance est l'unité de longueur, l'équation (37) exprime que, si l'état initial est un facteur u, la quantité de chaleur que

perd cette portion, pendant toute la durée du refroidissement, par le rayonnement latéral, est précisément égale à l'excès de chaleur qu'elle possédait primitivement.

La relation (37), entre deux intégrales, l'une double, et l'autre simple, paraît indiquer que pour obtenir la première il doit être préférable d'évaluer la seconde. Mais, dans le fait, c'est l'inverse qui a lieu, par suite du facteur θ^2, qu'il faut reconnaître dans la seconde, et qui la rend plus compliquée que la première.

Pour exprimer la loi intégrale du refroidissement par rayonnement, d'autres polyèdres que le prisme rectangle, il faut spécifier leur forme, ou particulariser leur base σ s'il s'agit de prismes droits; puis, chercher les expressions analytiques des facteurs U, ou u, et les équations aux paramètres Θ, ou θ, exigées par la vérification du groupe (16), ou (31). Or, à très-peu d'exceptions près, ces expressions et ces équations sont telles, que leurs variables et leurs inconnues entrent sous des intégrales définies; genre de solution en quelque sorte étranger à la partie principale du Cours actuel, et qu'il convient d'écarter de ses dernières leçons. Heureusement, si peu nombreux qu'ils soient, les polyèdres exceptionnels sont faciles à reconnaître, car ils ne sont autres que ceux dont le refroidissement par communication, peut toujours s'exprimer par des séries trigonométriques et périodiques. Ainsi, outre le prisme rectangle déjà traité, on a, le prisme triangulaire à base rectangle isocèle, le prisme triangulaire régulier, et l'hémirégulier, les tétraèdres $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{24}$. Nous aborderons ces polyèdres dans les deux leçons suivantes. Et, leurs solutions, jointes à celle du prisme rectangle, justifieront, par le fait, et par leur marche même, la loi que nous venons d'énoncer, comme régissant les exceptions.

D'ailleurs, comme on l'a vu dans plusieurs des leçons

précédentes, un simple changement des sinus en cosinus, et des cosinus en sinus, suffit pour déduire, de la série qui exprime le refroidissement par communication d'un polyèdre, celle qui exprime le refroidissement du même corps lorsque toutes ses faces, ou plusieurs d'entre elles, sont imperméables à la chaleur, ou sans flux. C'est-à-dire qu'aux deux limites extrêmes, $l = \infty$ et $l = 0$, la série a la même forme ; ce qui rend presque certaine la conservation de cette forme lors des valeurs intermédiaires.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

PRISMES TRIANGULAIRES RAYONNANTS.

Refroidissement par rayonnement du prisme triangulaire à base rectangle isocèle. — Refroidissement par rayonnement du prisme triangulaire régulier, aux faces latérales similaires, lors d'un état initial symétrique. — Cas de l'état initial constant à même hauteur.

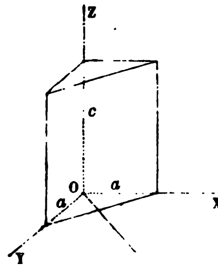
---

§ CLXXXIV.

PRISME TRIANGULAIRE RECTANGLE ISOCÈLE.

Lors du refroidissement du prisme triangulaire droit à base rectangle isocèle, dont les faces latérales ont pour équa-

Fig. 35.



tions $(x = 0, y = 0, x + y = a)$, les conductibilités extérieures étant, l sur les deux faces orthogonales, et h sur la face hypoténuse, dans le groupe (31), § CLXXXI, après l'équation générale

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \theta^2 u = 0,$$

celle au périmètre ω se décompose ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\frac{du}{dx} - lu\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{dy} - lu\right)_{y=0} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + h\sqrt{2}.u\right)_{x+y=a} = 0; \end{cases}$$

la normale extérieure, à la troisième face, étant parallèle à la bissectrice de l'angle droit des (x, y), d'où

$$\cos\xi = \cos\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On satisfait à l'équation aux différences partielles (1), et aux deux premières conditions (2), en prenant

$$(3)\qquad u = X'Y' \pm X''Y'',$$

les facteurs X' et X'' en x seul, Y' et Y'' en y seul, étant donnés par le tableau

$$(4)\qquad \begin{cases} X' = \cos(mx - \alpha), \quad X'' = \cos(nx - \beta); \\ Y' = \cos(ny - \beta), \quad Y'' = \cos(my - \alpha); \\ \theta^2 = m^2 + n^2; \ \operatorname{tang}\alpha = \frac{l}{m}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{l}{n}; \end{cases}$$

où m et n sont deux paramètres quelconques; θ^2 la somme de leurs carrés; α et β les arcs, moindres que $\frac{\pi}{2}$, dont les tangentes sont respectivement égales aux quotients de l par m et par n. En effet, avec ces valeurs, les produits $X'Y'$, $X''Y''$, vérifient l'équation (1) avec le même θ^2; puis, quand $x = 0$, les facteurs X', X'', deviennent $\cos\alpha$, $\cos\beta$, tandis que leurs dérivées sont $m\sin\alpha$, $n\sin\beta$, on a donc, d'après la définition (4) des arcs (α, β),

$$\left(\frac{1}{X'}\frac{dX'}{dx}\right)_0 = \left(\frac{1}{X''}\frac{dX''}{dx}\right)_0 = l;$$

et les facteurs Y', Y'', donnent pareillement

$$\left(\frac{1}{Y'}\frac{dY'}{dy}\right)_0 = \left(\frac{1}{Y''}\frac{dY''}{dy}\right)_0 = l;$$

d'où résulte que chacun des termes de u (3) vérifiera les deux premières conditions (2).

Ces vérifications ont lieu, quels que soient les paramètres m et n. Mais, pour que la dernière condition (2) soit satisfaite, ces paramètres doivent être racines d'un couple d'équations transcendantes qu'il s'agit d'établir. Lorsque, dans u (3), on change x en y et y en x, il reprend la même valeur absolue, avec les mêmes signes lors de l'addition des deux termes, avec un signe contraire lors de leur soustraction. C'est-à-dire que, par rapport au plan bissecteur ($y = x$), u est symétrique, directement dans le premier cas, inversement dans le second; et, comme on va le voir, les équations aux paramètres diffèrent de l'un à l'autre.

§ CLXXXV.

CONDITION DE LA FACE HYPOTÉNUSE.

Avec le signe intermédiaire (+), et les valeurs (4), la fonction u (3) est

$$(5)\quad u = \cos(mx - \alpha)\cos(ny - \beta) + \cos(nx - \beta)\cos(my - \alpha);$$

écrite, ainsi que ses dérivées, en remplaçant les produits de cosinus et sinus, par les demi-sommes et les demi-différences d'autres cosinus et sinus, elle donne au trinôme

$$(6)\qquad \left(h\sqrt{2}\,u + \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right)$$

le premier développement

$$\frac{1}{2}h\sqrt{2}\left\{\begin{array}{c}\cos(mx+ny-\alpha-\beta)+\cos(mx-ny+\beta-\alpha)\\+\cos(nx+my-\alpha-\beta)+\cos(nx-my+\alpha-\beta)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{1}{2}m\left\{\begin{array}{c}\sin(mx+ny-\alpha-\beta)+\sin(mx-ny+\beta-\alpha)\\+\sin(nx+my-\alpha-\beta)-\sin(nx-my+\alpha-\beta)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{1}{2}n\left\{\begin{array}{c}\sin(mx+ny-\alpha-\beta)-\sin(mx-ny+\beta-\alpha)\\+\sin(nx+my-\alpha-\beta)+\sin(nx-my+\alpha-\beta)\end{array}\right\}$$

qui, en remplaçant, inversement, dans chaque parenthèse, les sommes ou les différences des cosinus ou sinus superposés, par des doubles produits d'autres sinus ou cosinus, conduit au second

$$h\sqrt{2}\left\{\begin{array}{c}\cos\left(\frac{m+n}{2}(x+y)-\alpha-\beta\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}(x-y)\right)\\+\cos\left(\frac{m-n}{2}(x+y)+\beta-\alpha\right)\cos\left(\frac{m+n}{2}(x-y)\right)\end{array}\right\}$$
$$-m\left\{\begin{array}{c}\sin\left(\frac{m+n}{2}(x+y)-\alpha-\beta\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}(x-y)\right)\\+\sin\left(\frac{m-n}{2}(x+y)+\beta-\alpha\right)\cos\left(\frac{m+n}{2}(x-y)\right)\end{array}\right\}$$
$$-n\left\{\begin{array}{c}\sin\left(\frac{m+n}{2}(x+y)-\alpha-\beta\right)\cos\left(\frac{m-n}{2}(x-y)\right)\\-\sin\left(\frac{m-n}{2}(x+y)+\beta-\alpha\right)\cos\left(\frac{m+n}{2}(x-y)\right)\end{array}\right\}.$$

Or, d'après la troisième condition (2), cette expression du trinôme (6) doit s'annuler quand la somme $(x+y)$ est a, donc si l'on pose, pour simplifier

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos\\\sin\end{array}\right.\left[\frac{m+n}{2}a-\alpha-\beta\right]=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{C}\\\mathrm{S}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\cos\\\sin\end{array}\right.\left[\frac{m-n}{2}a+\beta-\alpha\right]=\left\{\begin{array}{l}\mathrm{C}'\\\mathrm{S}'\end{array}\right.$$

on doit avoir identiquement

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &[h\sqrt{2}\,C-(m+n)S]\cos\left(\frac{m-n}{2}(x-y)\right)\\ &+[h\sqrt{2}\,C'-(m-n)S']\cos\left(\frac{m+n}{2}(x-y)\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

quelle que soit la différence $(x-y)$; ce qui exige que l'on ait séparément

$$(9)\qquad (m+n)\,S=h\sqrt{2}\,C,\quad (m-n)\,S'=h\sqrt{2}\,C'.$$

Et tel est le couple d'équations transcendantes, dont les paramètres m et n doivent être racines, pour que l'équation à la face hypoténuse soit satisfaite par u (5).

§ CLXXXVI.

ÉQUATIONS AUX PARAMÈTRES.

Les deux paramètres sont nécessairement inégaux; car si $m=n$, on a $\beta=\alpha$, le second arc (7) est nul, et la dernière (9) est impossible, tant que h n'est pas zéro. Soit donc $m>n$, et conséquemment $\beta>\alpha$ (4). En rétablissant les arcs (7), les équations (9) deviennent

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\left(\frac{m+n}{2}a-\alpha-\beta\right)=\frac{h\sqrt{2}}{m+n}=\operatorname{tang}\mu,\\ &\operatorname{tang}\left(\frac{m-n}{2}a+\beta-\alpha\right)=\frac{h\sqrt{2}}{m-n}=\operatorname{tang}\nu,\end{aligned}\right.$$

μ et ν étant les arcs, moindres que $\frac{\pi}{2}$, dont les tangentes représentent respectivement les quotients de $h\sqrt{2}$ par $(m+n)$ et par $(m-n)$. Ces équations, réduites aux tan-

gentes seules, sont satisfaites par les arcs

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{m+n}{2}a - \alpha - \beta = i\pi + \mu, \\ \dfrac{m-n}{2}a + \beta - \alpha = j\pi + \nu, \end{cases}$$

i et j étant des nombres entiers quelconques, et avec ces arcs elles donnent le groupe

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{ma+na}{2} = i\pi + \alpha + \beta + \mu = \dfrac{\frac{ah}{\sqrt{2}}}{\operatorname{tang}\mu}, \\ \dfrac{ma-na}{2} = j\pi + \alpha - \beta + \nu = \dfrac{\frac{ah}{\sqrt{2}}}{\operatorname{tang}\nu}, \end{cases}$$

qui, rapproché des relations (4) en (α, β), conduit à celui-ci :

$$(13)\quad \begin{cases} ma = (i+j)\pi + \mu + \nu + 2\alpha = \dfrac{al}{\operatorname{tang}\alpha}, \\ na = (i-j)\pi + \mu - \nu + 2\beta = \dfrac{al}{\operatorname{tang}\beta}. \end{cases}$$

Par la suppression des premiers membres, les quatre équations simultanées (12) et (13) serviront à déterminer (soit graphiquement, soit par la méthode des substitutions successives) l'unique système des arcs $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, correspondant à chaque couple des entiers (i, j). Et, quand ces arcs seront connus, le groupe (13) donnera les valeurs séparées des paramètres m et n.

Avec le signe intermédiaire (—), et les valeurs (4), la fonction u (3) devient

$$(14)\quad u = \cos(mx-\alpha)\cos(ny-\beta) - \cos(nx-\beta)\cos(my-\alpha).$$

Les paramètres m et n sont inégaux, puisque u (14) est nul

si $m=n$; on peut donc supposer encore $m>n$, d'où $\beta>\alpha$. La substitution de ce nouveau facteur (14) dans le trinôme (6), et des transformations semblables aux précédentes, conduisent à l'équation finale

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} (h\sqrt{2}S+(m+n)C)\sin\left(\frac{m-n}{2}(x-y)\right) \\ +(h\sqrt{2}S'+(m-n)C')\sin\left(\frac{m+n}{2}(x-y)\right) \end{array} \right\} = 0,$$

où (S, C), (S', C'), sont les sinus et cosinus des mêmes arcs (7), et qui, devant être vérifiée quel que soit $(x-y)$, exige que l'on ait séparément

$$(16)\quad h\sqrt{2}S+(m+n)C=0, \quad h\sqrt{2}S'+(m-n)C'=0.$$

Et tel est le couple d'équations transcendantes, dont les paramètres m et n doivent être racines, pour que l'équation à la face hypoténuse soit satisfaite par u (14).

Ici, ce seront les cotangentes des arcs (7), prises négativement, qui devront être égalées aux seconds membres (10). De là résulte qu'en définissant les (μ, ν) par les mêmes relations (10), les nouvelles équations aux paramètres différeront des (11), par l'addition du quadrant $\frac{\pi}{2}$ à chaque second membre; ce qui donnera

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m+n}{2}a-\alpha-\beta=i\pi+\frac{\pi}{2}+\mu, \\ \frac{m-n}{2}a+\beta-\alpha=j\pi+\frac{\pi}{2}+\nu; \end{array} \right.$$

la même addition devra être faite aux seconds membres des équations simultanées (12); quant à celles (13), la seconde ne changera pas, mais dans la première le multiple de π sera $(i+j+1)\pi$.

§ CLXXXVII.

SÉRIE TOTALE. VÉRIFICATION.

Désignant par u_1 et u_2 les facteurs u (5) et u (14), dont les paramètres (m, n) sont respectivement régis par les relations (11) et (17), la fonction intégrale V, mise sous la forme

$$(18)\qquad V = \sum\!\!\sum\!\!\sum M_1 u_1 Z e^{-(\theta^2+\tau^2)\frac{t}{k}} + \sum\!\!\sum\!\!\sum M_2 u_2 Z e^{-(\theta^2+\tau^2)\frac{t}{k}},$$

vérifiera les conditions aux cinq faces du prisme triangulaire droit à base rectangle isocèle. L'état initial exigera l'identité

$$(19)\qquad \sum\!\!\sum\!\!\sum M_1 u_1 Z + \sum\!\!\sum\!\!\sum M_2 u_2 Z = f.$$

On l'établira à l'aide des théorèmes (32), § CLXXXI, qui donneront, pour les coefficients, la valeur (34) du même paragraphe, écrite en (M_1, u_1), en (M_2, u_2), et où le symbole $\int_\sigma d\sigma$ sera remplacé par

$$(20)\qquad \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \ldots.$$

D'après la distinction établie entre les facteurs u_1 et u_2, des deux coefficients, M_1 existera seul, ou disparaîtra, si l'état initial f apporte une symétrie calorifique directe, ou inverse, par rapport au plan bissecteur $(y = x)$; l'inverse aura lieu pour M_2; et la fonction V (18) se réduira à la première, ou à la seconde, des deux triples séries.

L'équation (37), § CLXXXII, a ses deux membres nuls pour le facteur inversement symétrique u_2 (14). Sa vérification par u_1 (5) exige un calcul dont voici la marche. On effectue d'abord les intégrations indiquées. Les résultats obtenus se composent de plusieurs fractions, ayant aux dénominateurs les facteurs m, n, $(m+n)$, $(m-n)$, et

aux numérateurs des doubles produits de sinus et cosinus, auxquels on substitue les sommes ou les différences d'autres sinus et cosinus. Les arcs de ces derniers contiennent séparément *ma* et *na*, que l'on remplace par leurs valeurs (13), en supprimant les multiples $(i+j)\pi$, $(i-j)\pi$, qui, étant de même parité, ne donneraient qu'une ambiguïté de signe, la même pour tous les termes, et pour les deux membres de l'équation à vérifier. On isole, par développement, les sinus et cosinus de $(\mu+\nu)$ et de $(\mu-\nu)$, qui sont alors multipliés par les sommes ou les différences des sinus et cosinus de $(\beta+\alpha)$ et de $(\beta-\alpha)$. Puis après avoir développé tous ces facteurs, on remplace les sinus et cosinus des arcs $(\alpha, \beta, \mu, \nu)$ par leurs valeurs en $(m, n, l, h\sqrt{2})$, groupées au tableau suivant :

$$m^2+l^2=\mathrm{A}^2,\quad \sin\alpha=\frac{l}{\mathrm{A}},\qquad \cos\alpha=\frac{m}{\mathrm{A}};$$

$$n^2+l^2=\mathrm{B}^2,\quad \sin\beta=\frac{l}{\mathrm{B}},\qquad \cos\beta=\frac{n}{\mathrm{B}};$$

$$(m+n)^2+2h^2=\mathcal{A}^2,\quad \sin\mu=\frac{h\sqrt{2}}{\mathcal{A}},\qquad \cos\mu=\frac{m+n}{\mathcal{A}};$$

$$(m-n)^2+2h^2=\mathcal{B}^2,\quad \sin\nu=\frac{h\sqrt{2}}{\mathcal{B}},\qquad \cos\nu=\frac{m-n}{\mathcal{B}}.$$

Par cette suite d'opérations, la double intégration (20) sur u_1 (5) conduit à

$$\frac{2}{mn\mathrm{AB}}\left(l^2+\frac{l^2(m^2-n^2)^2+2h^2l^2(m^2+n^2)+4h^2m^2n^2}{(m^2-n^2)\mathcal{A}\mathcal{B}}\right).$$

La partie de l'intégrale simple, relative aux cotés orthogonaux, est

$$\frac{2l^2}{mn\mathrm{AB}}\left(m^2+n^2+\frac{(m^2-n^2)(m^2+n^2+2h^2)}{\mathcal{A}\mathcal{B}}\right).$$

Celle qui concerne l'hypoténuse s'obtient, en prenant pour variable la distance ω à son point milieu, de telle sorte que $(x+y)$ étant a, $(x-y)$ est $\omega\sqrt{2}$; substituant

ces valeurs dans u_1 (5), mis sous la forme qui multiplie $h\sqrt{2}$ au second développement du trinôme (6), multipliant par $d\omega$, et doublant l'intégrale prise de $\omega = 0$ à $\omega = \frac{a}{\sqrt{2}}$, on arrivera à

$$\frac{2h^2 . 4mn(m^2 + n^2 + 2l^2)}{AB(m^2 - n^2)\,\mathcal{A}\mathcal{B}}.$$

Enfin, rapprochant ces trois résultats, on trouve que la somme des deux derniers, convenablement réduite, est égale au produit du premier par $(m^2 + n^2)$ ou θ^2. Et c'est ce qu'il fallait vérifier.

§ CLXXXVIII.

PRISME TRIANGULAIRE RÉGULIER.

Pour traiter le refroidissement par rayonnement du prisme triangulaire régulier, il faut reprendre ses coordonnées naturelles (P, P', P'') ou $P^{(j)}$, qui font avec les x positifs, les angles $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ ou $\alpha^{(j)}$, dont les six cosinus et sinus, $\gamma^{(j)}$ et $\sigma^{(j)}$, ont entre eux les relations groupées au tableau

(21)

$$\alpha' = \alpha + \frac{2\pi}{3},\quad \alpha'' = \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2\pi,\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos(\alpha'' - \alpha') = \cos(\alpha - \alpha'') = \cos(\alpha' - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

$\cos\alpha^{(j)} = \gamma^{(j)}$	$\gamma' = -\frac{1}{2}\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$	$\gamma'' = -\frac{1}{2}\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$
$\sin\alpha^{(j)} = \sigma^{(j)}$	$\sigma' = -\frac{1}{2}\sigma + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma$	$\sigma'' = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma$

$$\gamma^{(j)^2} + \sigma^{(j)^2} = 1,\quad \gamma + \gamma' + \gamma'' = 0,\quad \sigma + \sigma' + \sigma'' = 0.$$

$$\gamma'\gamma'' + \sigma'\sigma'' = \gamma''\gamma + \sigma''\sigma = \gamma\gamma' + \sigma\sigma' = -\frac{1}{2}$$

On a les formules de transformation

$$(22)\qquad P^{(j)} = x\gamma^{(j)} + y\sigma^{(j)},$$

et la cinquième ligne (21) donne l'identité

$$(23)\qquad P + P' + P'' = 0.$$

Les équations des faces latérales du prisme sont

$$(24)\qquad P^{(j)} = r,$$

r étant le rayon du cercle inscrit au triangle équilatéral.

Si les trois faces (24) ont la même conductibilité extérieure h, l'équation générale, et les conditions au périmètre, qui régissent le facteur u, § CLXXXI, seront

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \theta^2 u = 0,\\ &\left(hu + \frac{du}{dx}\gamma^{(j)} + \frac{du}{dy}\sigma^{(j)}\right)_{P^{(j)}=r} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si, de plus, l'état initial apporte une symétrie calorifique directe, par rapport aux trois plans bissecteurs

$$(26)\qquad P' = P'',\quad P'' = P,\quad P = P',$$

la fonction u sera complétement symétrique en (P, P', P''), comme le prisme, comme les conditions au périmètre, comme cet état initial.

Dans ce cas, le seul que nous étudierons, si, avec un arc constant, δ, et trois paramètres (λ, μ, ν) n'ayant entre eux d'autre relation que celle-ci

$$(27)\qquad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

on forme les six arcs polynômes

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{3r}(\lambda P + \mu P' + \nu P'') + \delta,\\
A_2 &= \frac{2}{3r}(\mu P + \nu P' + \lambda P'') + \delta,\\
A_3 &= \frac{2}{3r}(\nu P + \lambda P' + \mu P'') + \delta,\\
A'_1 &= \frac{2}{3r}(\nu P + \mu P' + \lambda P'') + \delta,\\
A'_2 &= \frac{2}{3r}(\mu P + \lambda P' + \nu P'') + \delta,\\
A'_3 &= \frac{2}{3r}(\lambda P + \nu P' + \mu P'') + \delta,
\end{aligned}\right.$$

et que, désignant les cosinus et sinus de ces arcs, par les lettres S et C, affectées des mêmes indices et accents que A, on compose la fonction

$$(29)\qquad u_1 = \left\{\begin{aligned}
&\ \ C_1 + C'_1\\
&+ C_2 + C'_2\\
&+ C_3 + C'_3
\end{aligned}\right.$$

qui possédera la symétrie voulue (car la permutation de deux des $P^{(i)}$ lui laissera la même valeur), cette fonction pourra être prise pour u, *si* elle vérifie l'équation générale (25) avec un même θ^2, et *s'il* est possible de déterminer les paramètres (λ, μ, ν) et l'arc δ, de telle sorte que la seconde condition (25) soit satisfaite pour $P = r$; ce qui suffira, car, d'après la symétrie établie, il en résultera que la même condition sera aussi satisfaite, pour $P' = r$, et pour $P'' = r$.

§ CLXXXIX.

CONDITION DES FACES LATÉRALES.

La substitution de C_1 à u, dans la première (25), exige que

$$\theta^2 = \left(\frac{2}{3r}\right)^2 \left\{(\lambda\gamma + \mu\gamma' + \nu\gamma'')^2 + (\lambda\sigma + \mu\sigma' + \nu\sigma'')^2\right\};$$

or, cette valeur, que les relations (21) réduisent à

$$(30) \qquad \theta^2 = \left(\frac{2}{3r}\right)^2 \left\{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\right\},$$

étant symétrique en (λ, μ, ν), sera successivement reproduite par les cinq autres termes de u_1 (29). Donc cette fonction vérifie l'équation générale (25) avec un même θ^2. Maintenant, les équations aux paramètres doivent se déduire de la condition que le trinôme

$$(31) \qquad \left(hu_1 + \gamma\frac{du_1}{dx} + \sigma\frac{du_1}{dy}\right)$$

soit identiquement nul quand $P = r$.

Ne considérant d'abord que le couple (A_1, A'_3) des arcs (28) où P a pour coefficient le même paramètre λ, désignons par u'_1 la somme de leurs cosinus, cette fonction partielle et ses dérivées seront

$$(32) \quad \begin{cases} u'_1 = C_1 + C'_3, \\ \dfrac{du'_1}{dx} = -\dfrac{2}{3r}\Big[(\lambda\gamma + \mu\gamma' + \nu\gamma'')S_1 + (\lambda\gamma + \nu\gamma' + \mu\gamma'')S'_3\Big], \\ \dfrac{du'_1}{dy} = -\dfrac{2}{3r}\Big[(\lambda\sigma + \mu\sigma' + \nu\sigma'')S_1 + (\lambda\sigma + \nu\sigma' + \mu\sigma'')S'_3\Big]. \end{cases}$$

Lors de la substitution dans le trinôme (31), où les dérivées en x et en y ont respectivement pour facteurs γ et σ,

la réunion des deux parenthèses qui multiplient, soit S_1, soit S'_3, dans les deux dérivées (32) de u_1, donnera la même somme, $\frac{3}{2}\lambda$, d'après les relations (21) (dernière ligne) et (27) ; d'où

$$hu'_1 + \gamma \frac{du'_1}{dx} + \sigma \frac{du'_1}{dy} = h.(C_1 + C'_2) - \frac{\lambda}{r}(S_1 + S'_3).$$

Si l'on y remplace les sommes des cosinus et sinus par les doubles produits d'autres sinus et cosinus, en ayant égard aux relations (23) et (27), l'expression précédente devient la première du groupe

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{r}\left[hr\cos\left(\lambda\frac{P}{r}+\delta\right)-\lambda\sin\left(\lambda\frac{P}{r}+\delta\right)\right]\cos\frac{\mu-\nu}{3r}(P'-P'');\\ &\frac{2}{r}\left[hr\cos\left(\mu\frac{P}{r}+\delta\right)-\mu\sin\left(\mu\frac{P}{r}+\delta\right)\right]\cos\frac{\nu-\lambda}{3r}(P'-P'');\\ &\frac{2}{r}\left[hr\cos\left(\nu\frac{P}{r}+\delta\right)-\nu\sin\left(\nu\frac{P}{r}+\delta\right)\right]\cos\frac{\lambda-\nu}{3r}(P'-P''); \end{aligned} \right.$$

la seconde et la troisième résultent, de la même manière, des couples (A_2, A'_2), et (A_3, A'_1), où P a le même coefficient μ, et ν. La somme de ces trois expressions partielles, sera l'expression totale du trinôme (31). Or, quand $P = r$, cette somme doit être identiquement nulle, quelle que soit la différence $(P' - P'')$; les trois parenthèses (33), qui multiplient des cosinus d'arcs variables avec $(P' - P'')$, et différents, doivent donc s'annuler. Ce qui donnera les trois équations cherchées.

§ CXC.

ÉQUATIONS AUX PARAMÈTRES.

Si l'on désigne par (l, m, n) les trois arcs, positifs ou négatifs, moindres que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, dont les tangen-

tes expriment respectivement les quotients de hr, par λ, par μ, par ν, ces trois équations aux paramètres sont

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}(\lambda + \delta) &= \frac{hr}{\lambda} = \operatorname{tang} l,\\ \operatorname{tang}(\mu + \delta) &= \frac{hr}{\mu} = \operatorname{tang} m,\\ \operatorname{tang}(\nu + \delta) &= \frac{hr}{\nu} = \operatorname{tang} n. \end{aligned}\right.$$

Elles indiquent que les trois différentes $(\lambda + \delta - l)$, $(\mu + \delta - m)$, $(\nu + \delta - n)$ doivent être trois multiples de π, positifs ou négatifs, et peuvent être remplacées par les suivantes

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{hr}{\operatorname{tang} l} = \dot{l} - \delta,\\ \mu &= \frac{hr}{\operatorname{tang} m} = \dot{m} - \delta,\\ \nu &= \frac{hr}{\operatorname{tang} n} = \dot{n} - \delta, \end{aligned}\right.$$

en désignant, pour simplifier, par les lettres $\dot{l}$, $\dot{m}$, $\dot{n}$, surmontées d'un point, les sommes $(j\pi + l)$, $(j'\pi + m)$, $(j''\pi + n)$, de chaque multiple et de son augment.

Mais la constante δ ne peut pas rester indéterminée. Or, la relation (27), qui a présidé à toutes les transformations précédentes, devant être satisfaite, il faut que la somme des derniers membres (35) soit zéro, comme celle des premiers ; d'où

$$(36)\qquad \delta = \frac{\dot{l} + \dot{m} + \dot{n}}{3}.$$

Par la substitution de cet arc, les équations (35) de-

viennent

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{hr}{\operatorname{tang} l} = \frac{2\dot{l} - \dot{m} - \dot{n}}{3}, \\ \mu &= \frac{hr}{\operatorname{tang} m} = \frac{2\dot{m} - \dot{n} - \dot{l}}{3}, \\ \nu &= \frac{hr}{\operatorname{tang} n} = \frac{2\dot{n} - \dot{l} - \dot{m}}{3}, \end{aligned}\right.$$

et sont simultanées. Avec les valeurs (35) et (36), l'arc A_1 (28) prend la forme

$$(38)\quad A_1 = \frac{2}{3r}\left[\dot{l}\left(P + \frac{r}{2}\right) + \dot{m}\left(P' + \frac{r}{2}\right) + \dot{n}\left(P'' + \frac{r}{2}\right)\right]$$

en ayant égard à la relation (23), qui indique aussi que l'on peut supprimer un des trois points, prendre l par exemple au lieu de $\dot{l}$, en remplaçant, dans m et n, j' et j'' par $(j' - j)$ et $(j'' - j)$. Les autres arcs (28) s'expriment de la même manière.

En résumé, à chaque couple des différences $(j' - j)$, $(j'' - j)$, correspondra un facteur u_1 (29), qui satisfera aux conditions (25). Il importe de distinguer particulièrement les facteurs dans lesquels deux des trois paramètres (λ, μ, ν) sont égaux. Si $\nu = \mu$, $\lambda = -2\mu$, les trois premiers arcs (28) deviennent, d'après (23)

$$(39)\quad A_1 = \delta - 2\mu\frac{P}{r},\quad A_2 = \delta - 2\mu\frac{P'}{r},\quad A_3 = \delta - 2\mu\frac{P''}{r},$$

et sont reproduits, dans un ordre inverse, par les trois derniers. Le facteur u_1, composé de termes doubles, peut être remplacé par sa moitié, ou par la somme (que nous désignerons par W) des cosinus des trois arcs précédents. Dans les relations (37), l est négatif, m et n sont égaux, ainsi que $\dot{m}$ et $\dot{n}$; posant

$$n = m = \varphi,\quad l = -\psi,$$

on a le groupe de valeurs égales

$$(40) \qquad \mu = \frac{hr}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{1}{2}\frac{hr}{\operatorname{tang}\psi} = \frac{i\pi + \varphi + \psi}{3} = \frac{\dot{\varphi} + \psi}{3};$$

le multiple $i\pi$, qui remplace $(j'-j)\pi$, pouvant être réuni à l'augment φ par le symbole $\dot{\varphi}$. La constante δ (36) est

$$(41) \qquad \delta = \frac{2\dot{\varphi} - \psi}{3} = 2\mu - \psi,$$

et, introduisant, pour simplifier, les

$$(42) \qquad p^{(j)} = r - P^{(j)},$$

le nouveau facteur W est définitivement

$$(43) \quad W = \cos\left(2\mu\frac{p}{r} - \psi\right) + \cos\left(2\mu\frac{p'}{r} - \psi\right) + \cos\left(2\mu\frac{p''}{r} - \psi\right).$$

On remarquera que les facteurs trouvés (u_1, W), ne conservent aucune trace des anciennes coordonnées, puisque les nouvelles, $P^{(j)}$, liées par l'identité (23), y restent seules. Ainsi les signes, empruntés pour opérer cette transformation, deviennent libres, entre autres la lettre σ, qui abandonne le sinus de l'angle arbitraire α, pour désigner de nouveau la base du prisme.

§ CXCI.

CONDITION DE L'ÉTAT INITIAL.

Composée avec les facteurs W (43), et ceux des facteurs u_1 (29) dont les paramètres (λ, μ, ν) sont inégaux. la fonction intégrale V sera

$$(44) \qquad V = \sum\sum\sum M_1 u_1 Z e^{-(\tau^2+\theta^2)\frac{t}{k}} + \sum N W Z e^{-\left[\tau^2 + \left(\frac{2\mu}{r}\right)^2\right]\frac{t}{k}},$$

et, comme au § CLXXXI, elle reproduira l'état initial

$$(45)\qquad \sum\!\!\sum M_1 u_1 Z + \sum NW = f,$$

à l'aide des coefficients

$$(46)\qquad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= \frac{\int_{-c}^{+c} dz \int_\sigma d\sigma . f u_1 Z}{\int_{-c}^{+c} Z^2 dz \int_\sigma d\sigma . u_1^2}, \\ N &= \frac{\int_{-c}^{+c} dz \int_\sigma d\sigma . fWZ}{\int_{-c}^{+c} Z^2 dz \int_\sigma d\sigma . W^2}. \end{aligned} \right.$$

Pour effectuer la double intégration sur le triangle équilatéral, on peut, dans les éléments différentiels, substituer à P'' sa valeur $-(P+P')$, et prendre, pour l'aire $d\sigma$, le parallélogramme dont les côtés dP, dP', comprennent l'angle $\frac{\pi}{3}$; d'où résulte

$$(47)\qquad \int_\sigma d\sigma \ldots = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-2r}^{r} dP \int_{-r-P}^{r} dP' \ldots .$$

Mais, pour que la fonction V (44) exprime, seule ou sans l'addition d'autres séries, le refroidissement du prisme triangulaire régulier, par le rayonnement de ses bases hétérogènes, et de ses faces latérales similaires, il faut que l'état initial apporte une symétrie calorifique directe, par rapport aux trois plans bissecteurs (26). Cette condition essentielle est évidemment satisfaite, si la fonction f ne varie qu'avec la coordonnée z; c'est-à-dire si tous les points d'une même section du prisme, parallèle aux bases, ont primitivement une même température. Alors les numéra-

teurs des coefficients (46) sont les produits du résultat de la sommation de $fZdz$ sur toute la hauteur, par les intégrales doubles

$$(48)\qquad \int_\sigma d\sigma . u_1,$$

$$(49)\qquad \int_\sigma d\sigma . \mathrm{W},$$

dont il faut reconnaître les valeurs.

§ CXCII.

CAS DE $f(z)$. NUMÉRATEURS DES COEFFICIENTS.

Les arcs (28), mis sous la forme (38), donnent trois couples (A_2, A'_1), (A_3, A'_3), (A_1, A'_2), dans lesquels P'', que l'on doit remplacer par $-(P+P')$, a respectivement le même coefficient $(\dot{l}, \dot{m}, \dot{n})$. Le premier couple étant

$$A_2 = \frac{2}{3r}[(\dot{m}-\dot{l})P + (\dot{n}-\dot{l})P'] + \frac{\dot{m}+\dot{n}+\dot{l}}{3},$$
$$A'_1 = \frac{2}{3r}[(\dot{n}-\dot{l})P + (\dot{m}-\dot{l})P'] + \frac{\dot{m}+\dot{n}+\dot{l}}{3},$$

on obtient l'intégrale partielle

$$(50)\left\{\begin{aligned}&\int_\sigma d\sigma(C_2+C'_1) = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-2r}^{r} dP\int_{-r-P}^{r} dP'(C_2+C'_1)\\ &= \frac{3r^2\sqrt{3}}{(\dot{m}-\dot{n})(\dot{n}-\dot{l})(\dot{l}-\dot{m})}\left\{\begin{aligned}&(\dot{m}-\dot{l})\cos(\dot{m}+\dot{n}-\dot{l})\\ &+(\dot{n}-\dot{l})\cos(\dot{n}+\dot{l}-\dot{m})\\ &+(\dot{l}-\dot{m})\cos(\dot{l}+\dot{m}-\dot{n})\end{aligned}\right\},\end{aligned}\right.$$

en effectuant d'abord les deux intégrations définies sur C_2,

changeant ensuite, $\dot{m}$ en $\dot{n}$ et $\dot{n}$ en $\dot{m}$, dans le résultat, pour en déduire celui qui appartient à C'_1, et que l'on ajoute au premier. La fraction (50) étant symétrique en $(\dot{l}, \dot{m}, \dot{n})$, sera reproduite par chacune des deux autres intégrales partielles.

L'intégrale totale (48) est donc égale à 3 fois la fraction (50). Ou bien, si l'on remplace les $(\dot{l}, \dot{m}, \dot{n})$ par leurs valeurs $(\lambda + \delta, \mu + \delta, \nu + \delta)$ déduites des (35), on aura

$$(51)\quad \int_\tau d\tau . u_1 = \frac{9r^2\sqrt{3}}{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)} \left\{ \begin{array}{l} (\mu - \nu)\cos(\delta - 2\lambda) \\ + (\nu - \lambda)\cos(\delta - 2\mu) \\ + (\lambda - \mu)\cos(\delta - 2\nu) \end{array} \right\};$$

et le dénominateur ne sera jamais nul, puisque pour chacun des facteurs u_1, dans V (44), les paramètres sont inégaux. Mais, au contraire, le numérateur est toujours nul : car, la parenthèse devient d'abord, en isolant les facteurs (λ, μ, ν), remplaçant les différences de cosinus par des produits de sinus, et rappelant la relation (27),

$$2[\lambda \sin(\lambda + \delta)\sin(\nu - \mu) + \mu \sin(\mu + \delta)\sin(\lambda - \nu) \\ + \nu \sin(\nu + \delta)\sin(\mu - \lambda)];$$

puis, substituant aux facteurs $[\lambda \sin(\lambda + \delta), \mu \sin(\mu + \delta), \nu \sin(\nu + \delta)]$ leurs valeurs $[hr\cos(\lambda + \delta), hr\cos(\mu + \delta), hr\cos(\nu + \delta)]$ déduites des (34) et que l'on développe,

$$2hr \left\{ \begin{array}{l} [\cos\lambda \sin(\nu - \mu) + \cos\mu \sin(\lambda - \nu) + \cos\nu \sin(\mu - \lambda)]\cos\delta \\ - [\sin\lambda \sin(\nu - \mu) + \sin\mu \sin(\lambda - \nu) + \sin\nu \sin(\mu - \lambda)]\sin\delta \end{array} \right\};$$

enfin, développant les $[\sin(\nu - \mu), \sin(\lambda - \nu), \sin(\mu - \lambda)]$, on trouve définitivement zéro.

Ainsi, l'intégrale (48) est identiquement nulle. Passons à l'intégrale (49). D'après l'indifférence du couple de coordonnées $P^{(i)}$ au signe (47), on peut réduire W (43) à

son premier terme, et tripler le résultat. Remplaçant, dans ce premier terme, p par $r - P$, changeant au cosinus le signe de l'arc, effectuant l'intégration en P′ (47), on a ensuite

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-2r}^{r} (P + 2r) \cos\left(\frac{2\mu P}{r} - 2\mu + \psi\right) dP \\ & = \frac{r^2}{\mu\sqrt{3}} \left(3 \sin\psi + \frac{\cos\psi - \cos(6\mu - \psi)}{2\mu}\right). \end{aligned} \right.$$

Or, d'après l'équation multiple (41), $\cos(6\mu - \psi)$ est égal à $\cos(2\varphi + \psi)$, et la tangente de φ étant double de celle de ψ, on a

$$(53) \qquad \sin\varphi \cos\psi = 2 \sin\psi \cos\varphi;$$

d'où résulte, par développement et substitutions,

$$\cos\psi - \cos(2\varphi + \psi) = 6 \sin\psi \sin\varphi \cos\varphi;$$

et, à l'aide de cette dernière expression, le triple de la valeur (52) donne, pour l'intégrale (49)

$$(54) \qquad \int_\sigma d\sigma . W = \frac{3r^2\sqrt{3}}{\mu} \left(1 + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\mu}\right) \sin\psi.$$

§ CXCIII.

DÉNOMINATEURS. SÉRIE TOTALE.

Le numérateur de N (46) n'étant pas nul, il faut aussi calculer son dénominateur. Effectuant sur W^2 (43) la double intégration (47), et recourant plusieurs fois aux relations (40), on parvient à mettre le résultat sous la forme

$$(55) \int_\sigma d\sigma . W^2 = \frac{9 r^2\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\mu}\right) \left(1 + \frac{\sin(\varphi - \psi)\cos(\varphi - \psi)}{\mu}\right).$$

Le rapport des deux intégrales (54) et (55) est

$$\frac{2\sin\psi}{i\pi+\varphi+\psi+3\sin(\varphi-\psi)\cos(\varphi-\psi)}.$$

Or, d'après (53), le triple de $\sin(\varphi-\psi)$ est égal à $\sin(\varphi+\psi)$, d'où résulte

$$3\sin(\varphi-\psi)\cos(\varphi-\psi)=\sin\varphi\cos\varphi+\sin\psi\cos\psi.$$

On a donc, à l'aide du symbole (30), § CLXVII, et de $\dot{\varphi}$ pour désigner $i\pi+\varphi$,

(56) $$\mathrm{N}=\frac{2\sin\psi}{\lambda(\dot{\varphi})+\lambda(\psi)}\,\frac{\int_{-c}^{+c}\mathrm{f}Z\,dz}{\int_{-c}^{+c}Z^2\,dz}.$$

En résumé, dans le cas actuel, V (44), réduit à sa dernière partie, est le produit de la série simple

(57) $$\mathrm{V}_1=\frac{1}{c}\sum\frac{(\dot{\rho}+\rho')\int_{-c}^{+c}\mathrm{f}Z\,dz}{\lambda(\dot{\rho})+\lambda(\rho')}Ze^{-\tau^2\frac{t}{k}},$$

qui exprime le refroidissement du mur aux faces hétérogènes ($z=+c$, $z=-c$), lors de l'état initial $\mathrm{f}(z)$, § CLXXIV, par la série

(58) $$\mathrm{V}_\Delta=2\sum\frac{\sin\psi}{\lambda(\dot{\varphi})+\lambda(\psi)}We^{-\left(\frac{2\mu}{r}\right)^2\frac{t}{k}},$$

simple aussi, composée avec les W (43), et qui, devant se réduire à l'unité, pour $t=0$, puisque V_1 (57) devient alors $\mathrm{f}(z)$, donne l'identité

(59) $$\sum\frac{W\sin\psi}{\lambda(\dot{\varphi})+\lambda(\psi)}=\frac{1}{2},$$

dans toute l'étendue du triangle équilatéral. Développement beaucoup plus général que celui du § XCIX, qui s'en déduit en faisant $h = \infty$, d'où $\psi = \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lorsque l'état initial f, toujours directement symétrique par rapport aux plans (26), dépend, non-seulement de z, mais aussi des coordonnées $P^{(i)}$, le numérateur de M_1 (46) n'étant pas nul, il est nécessaire de connaître le dénominateur. Son premier facteur est

$$\int_{-c}^{+c} Z^2 dz = c\,\frac{\lambda(\rho) + \lambda(\rho')}{\rho + \rho'},$$

d'après le § CLXXIV. Quant au second, effectuant sur u_1^2 (29), transformé en (P, P′) seuls, la double intégration (47), consultant les équations [(34), (35), (36), (37)] qui régissent les paramètres et leurs augments, on parvient à le mettre sous la forme

$$(60)\quad \int d\sigma . u_1^2 = 3r^2\sqrt{3}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1+\sin m\cos m}{\mu}\right)\left(\frac{1+\sin n\cos n}{\nu}\right) \\ +\left(\frac{1+\sin n\cos n}{\nu}\right)\left(\frac{1+\sin l\cos l}{\lambda}\right) \\ +\left(\frac{1+\sin l\cos l}{\lambda}\right)\left(\frac{1+\sin m\cos m}{\mu}\right) \end{array}\right\},$$

dont la symétrie était exigible.

Les séries (58) et (59) constatent que les propriétés analytiques du prisme triangulaire régulier, se refroidissant par communication, § CIV, s'étendent au cas plus général de son refroidissement par rayonnement, lorsque ses faces latérales, qui sont géométriquement similaires

ont la même conductibilité extérieure. Preuve nouvelle des simplifications qui doivent résulter, de la concordance établie, entre les facultés calorifiques, et les symétries géométriques, du corps solide que l'on se propose de traiter. Aussi, sans le secours de cette concordance, il eût été très-difficile, sinon impossible, d'aborder les polyèdres précédents, et surtout ceux de la leçon prochaine.

VINGTIÈME LEÇON.

TÉTRAÈDRES RAYONNANTS.

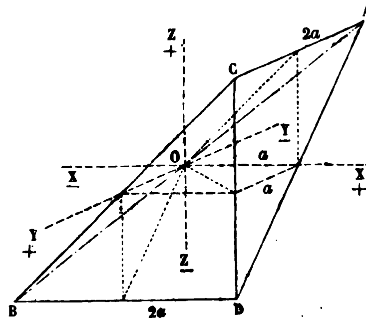
Refroidissement par rayonnement du tétraètre $\frac{1}{6}$, lorsque les deux faces orthogonales ont un même pouvoir émissif, ainsi que les deux faces inclinées. — Refroidissement par rayonnement du tétraèdre $\frac{1}{24}$, lorsque les trois faces empruntées aux plans diagonaux du cube ont le même pouvoir émissif.

§ CXCIV.

RAYONNEMENT DU TÉTRAÈDRE $\frac{1}{6}$.

Pour étudier la loi intégrale du refroidissement par rayonnement du tétraèdre, sixième partie du cube, il convient de poser ce polyèdre comme l'indique la figure.

Fig. 36.



24.

Les trois côtés ($\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$) ont même longueur, $2a$, et forment un système de lignes orthogonales, auxquelles les axes des (x, y, z) sont respectivement parallèles. L'origine O étant placée au milieu de la grande arête $\overline{AB}$, les quatre faces ont pour équations

$$(1) \quad \begin{cases} \text{ACD}\ldots\ x = a, & \text{BDC}\ldots\ y = b, \\ \text{ACB}\ldots\ x = z, & \text{BDA}\ldots\ y = -z. \end{cases}$$

Les deux premières étant géométriquement similaires, ainsi que les deux dernières, nous attribuerons, à chaque couple, une seule et même conductibilité extérieure, l au premier, h au second.

Le plan des xy coupe le polyèdre en deux pentaèdres équivalents, où les points correspondants (m, m') sont tellement disposés, qu'il faut changer, à la fois, x en y, y en x, z en $-z$, pour passer de l'un à l'autre. C'est-à-dire que, par rapport aux deux plans bissecteurs COD, XOY, formant un angle dièdre droit, les deux points m et m' ont respectivement le même symétrique ou la même image. Appelant *cosymétrie*, ce genre de correspondance, nous dirons que l'état initial, f, apporte une cosymétrie calorifique, soit directe, soit inverse, quand les températures primitives en m et en m', sont égales en valeur absolue, soit avec le même signe, soit avec des signes contraires.

§ CXCV.

FORMATION DU TERME SIMPLE.

Cela posé, la température variable V, fonction de (x, y, z, t), est régie par les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} + \dfrac{d^2\mathrm{V}}{dz^2} = k\,\dfrac{d\mathrm{V}}{dt}, \\ \left(\dfrac{d\mathrm{V}}{dx} + l\mathrm{V}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\dfrac{d\mathrm{V}}{dy} + l\mathrm{V}\right)_{y=b} = 0, \\ \left(-\dfrac{d\mathrm{V}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dz} + h\sqrt{2}\,\mathrm{V}\right)_{x=z} = 0, \\ \left(-\dfrac{d\mathrm{V}}{dy} - \dfrac{d\mathrm{V}}{dz} + h\sqrt{2}\,\mathrm{V}\right)_{y=-z} = 0, \\ \mathrm{V}_{t=0} = \mathrm{f}(x, y, z). \end{cases}$$

Car la normale extérieure est parallèle, à OX pour la première face (1), à OY pour la seconde, à la bissectrice de l'angle $\underset{-\ \ +}{\mathrm{XOZ}}$ pour la troisième, à la bissectrice de l'angle $\underset{-\ \ -}{\mathrm{YOZ}}$ pour la quatrième. Le terme simple a la forme

$$(3)\qquad \mathrm{V}_1 = \mathrm{U}e^{-\theta^2\frac{t}{k}},$$

où le facteur U, fonction de (x, y, z), et la constante θ^2, satisfont au groupe

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} + \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dy^2} + \dfrac{d^2\mathrm{U}}{dz^2} + \theta^2\mathrm{U} = 0, \\ \left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + l\mathrm{U}\right)_{x=a} = \mathrm{U}, \quad \left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dy} + l\mathrm{U}\right)_{y=b} = 0, \\ \left(-\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{U}}{dz} + h\sqrt{2}\,\mathrm{U}\right)_{x=z} = 0, \\ \left(-\dfrac{d\mathrm{U}}{dy} - \dfrac{d\mathrm{U}}{dz} + h\sqrt{2}\,\mathrm{U}\right)_{y=-z} = 0. \end{cases}$$

Avec trois paramètres quelconques (m, n, p), et les trois arcs (α, β, γ), moindres que $\frac{\pi}{2}$, dont les tangentes reproduisent respectivement les quotients de l, par m, par n, par p,

posant

$$(5)\quad \begin{cases} \theta^2 = m^2 + n^2 + p^2, \\ \dfrac{m}{l} = \text{tang}\,\alpha, \quad \dfrac{l}{n} = \text{tang}\,\beta, \quad \dfrac{l}{p} = \text{tang}\,\gamma, \\ ma - \alpha = \mathfrak{M}, \quad na - \beta = \mathfrak{N}, \quad pa - \gamma = \mathfrak{P}. \end{cases}$$

On vérifie l'équation générale (4), et les deux premières équations à la surface, en prenant la fonction

$$(6)\ \text{U} = \begin{cases} \text{M}\begin{Bmatrix} \cos(mz - \mu)\cos(ny - \mathfrak{N})\cos(px - \mathfrak{P}) \\ + \cos(mz + \mu)\cos(py - \mathfrak{P})\cos(nx - \mathfrak{N}) \end{Bmatrix}, \\ + \text{N}\begin{Bmatrix} \cos(nz - \nu)\cos(py - \mathfrak{P})\cos(mx - \mathfrak{M}) \\ + \cos(nz + \nu)\cos(my - \mathfrak{M})\cos(px - \mathfrak{P}) \end{Bmatrix}, \\ + \text{P}\begin{Bmatrix} \cos(pz - \rho)\cos(my - \mathfrak{M})\cos(nx - \mathfrak{N}) \\ + \cos(pz + \rho)\cos(ny - \mathfrak{N})\cos(mx - \mathfrak{M}) \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

où les arcs complémentaires (μ, ν, ρ), et les coefficients (M, N, P), sont constants et indéterminés. Car, d'abord, les six termes de U (6) vérifient successivement la première (4) avec le même θ^2 (5); ensuite, dans chaque terme, les deux facteurs X en x, Y en y, sont tels que $\left(-\frac{1}{\text{X}}\frac{d\text{X}}{dx}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\text{Y}}\frac{d\text{Y}}{dy}\right)$ se réduisent à l, quand x et y deviennent a; par exemple, avec

$$\text{X} = \cos(mx - \mathfrak{M}) = \cos(m(x-a) + \alpha),$$

on a

$$\left(-\frac{1}{\text{X}}\frac{d\text{X}}{dx}\right)_a = m\,\text{tang}\,\alpha = l,$$

d'après la définition (5) des arcs $\mathfrak{M}$ et α; et ainsi des autres facteurs.

La fonction U (6) restant la même quand on y change, à la fois, x en y, y en x, z en $-z$, est directement cosymétrique; et si l'on y remplaçait les cosinus en z, par les sinus des mêmes axes, elle deviendrait inversement cosymétrique. La solution s'achevant de la même manière pour

les deux cas, il suffit de traiter le premier, ou d'admettre que l'état initial apporte une cosymétrie calorifique directe. Il s'agit, maintenant, de trouver quelles relations doivent exister entre les paramètres (m, n, p), les arcs complémentaires (μ, ν, ρ) et les coefficients (M, N, P), pour que U (6) vérifie la condition (4) à la face $(x = z)$; ce qui suffira, car, d'après la cosymétrie établie, la condition à la face $(y = -z)$ sera conséquemment satisfaite.

§ CXCVI.

CONDITIONS DES FACES INCLINÉES.

Les six termes de U (6) forment trois couples, distincts par le facteur commun en y. Si l'on extrait, de chaque couple, la fonction trigonométrique en (z, x), que multiplie le facteur en y, pour la substituer seule à U dans le trinôme

$$(7) \qquad \left(-\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz} + h\sqrt{2}\,U\right),$$

le résultat définitif de cette substitution partielle, doit s'annuler, séparément, quand $x = z$. Ainsi traitée, la fonction

$$(8) \quad [P\cos(pz - \rho)\cos(nx - \mathfrak{N}) + N\cos(nz + \nu)\cos(px - \mathfrak{P})]$$

qui correspond au facteur $\cos(my - \mathfrak{M})$, donne l'équation finale

$$(9) \left\{\begin{aligned} &\cos(n-p)z \left\{\begin{aligned} &P[h\sqrt{2}\cos(\mathfrak{N}-\rho) - (n+p)\sin(\mathfrak{N}-\rho)] \\ &+ N[h\sqrt{2}\cos(\mathfrak{P}+\nu) - (n+p)\sin(\mathfrak{P}+\nu)] \end{aligned}\right\} \\ &+\sin(n-p)z \left\{\begin{aligned} &P[h\sqrt{2}\sin(\mathfrak{N}-\rho) + (n+p)\cos(\mathfrak{N}-\rho)] \\ &+ N[-h\sqrt{2}\sin(\mathfrak{P}+\nu) - (n+p)\cos(\mathfrak{P}+\nu)] \end{aligned}\right\} \\ &+\cos(n+p)z \left\{\begin{aligned} &P[h\sqrt{2}\cos(\mathfrak{N}+\rho) - (n-p)\sin(\mathfrak{N}+\rho)] \\ &+ N[h\sqrt{2}\cos(\mathfrak{P}-\nu) + (n-p)\sin(\mathfrak{P}-\nu)] \end{aligned}\right\} \\ &+\sin(n+p)z \left\{\begin{aligned} &P[h\sqrt{2}\sin(\mathfrak{N}+\rho) + (n-p)\cos(\mathfrak{N}+\rho)] \\ &+ N[h\sqrt{2}\sin(\mathfrak{P}-\nu) + (n-p)\cos(\mathfrak{P}-\nu)] \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} = 0$$

qui, devant être satisfaite quel que soit z, exige que les quatre parenthèses principales $\{\ldots\}$, soient nulles, toutes, et séparément.

De là résultent quatre équations de condition, entre $(n, p, \nu, \rho, \mathrm{N}, \mathrm{P})$. Si l'on pose, pour simplifier

$$(10) \qquad \frac{h\sqrt{2}}{n+p} = \operatorname{tang} \mathcal{A}, \quad \frac{h\sqrt{2}}{n-p} = \operatorname{tang} \mathcal{A}',$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ étant deux arcs, moindres que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, le premier positif, le second positif ou négatif, ces équations de condition donnent, pour le rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}}$, les quatre valeurs

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(\mathcal{A} - \mathcal{P} - \nu)}{\sin(\mathcal{N} - \rho - \mathcal{A})}, & \dfrac{\cos(\mathcal{A} - \mathcal{P} - \nu)}{\cos(\mathcal{N} - \rho - \mathcal{A})}, \\[2ex] \dfrac{\sin(\mathcal{P} - \nu + \mathcal{A}')}{\sin(\mathcal{N} + \rho - \mathcal{A}')}, & \dfrac{\cos(\mathcal{P} - \nu + \mathcal{A}')}{\cos(\mathcal{N} + \rho - \mathcal{A}')}, \end{cases}$$

lesquelles doivent être identiques. L'égalité des deux premières (11) exige que la différence des deux arcs $(\mathcal{N} - \rho - \mathcal{A})$, $(\mathcal{A} - \mathcal{P} - \nu)$, soit un multiplie $i\pi$. L'égalité des deux dernières (11) exige pareillement que la différence des arcs $(\mathcal{N} + \rho - \mathcal{A}')$, $(\mathcal{P} - \nu + \mathcal{A}')$ soit un multiple $j\pi$; et le rapport $(\mathrm{P} : \mathrm{N})$ étant $\cos i\pi$ par le premier couple, $\cos j\pi$ par le second, il faut que les multiples $i\pi$ et $j\pi$ soient tous deux pairs ou tous deux impairs. En résumé, les relations

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathcal{N} + \mathcal{P} + \nu - \rho = i\pi + 2\mathcal{A}, \\ \mathcal{N} - \mathcal{P} + \nu + \rho = j\pi + 2\mathcal{A}', \\ \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}} = \cos i\pi = \cos j\pi, \end{cases}$$

où les entiers (i, j) ont même parité, sont nécessaires et suffisent pour que l'équation (9) soit satisfaite, quel que soit z.

Pareillement, la fonction trigonométrique en (z, x)

(13) $[\mathrm{M}\cos(mz - \mu)\cos(px - \mathfrak{P}) + \mathrm{P}\cos(pz + \rho)\cos(mx - \mathfrak{M})]$

qui multiplie $\cos(ny - \mathfrak{N})$ au second membre (6), substituée seule à U dans le trinôme (7), donne un résultat qui s'annule quand $x = z$, si ayant posé

$$(14) \qquad \frac{h\sqrt{2}}{p+m} = \operatorname{tang}\mathfrak{B}, \quad \frac{h\sqrt{2}}{p-m} = \operatorname{tang}\mathfrak{B}',$$

on établit, entre $(\mathfrak{P}, \mathfrak{M}, \rho, \mu, \mathrm{P}, \mathrm{M})$, les relations

$$(15) \quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{P} + \mathfrak{M} + \rho - \mu = i'\pi + 2\mathfrak{B}, \\ &\mathfrak{P} - \mathfrak{M} + \rho + \mu = j'\pi + 2\mathfrak{B}', \\ &\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = \cos i'\pi = \cos j'\pi, \end{aligned}\right.$$

où i' et j' sont des entiers de même parité. Enfin, la fonction

(16) $[\mathrm{N}\cos(nz - \nu)\cos(mx - \mathfrak{M}) + \mathrm{M}\cos(mz + \mu)\cos nx - \mathfrak{N})]$,

facteur de $\cos(py - \mathfrak{P})$ dans U (6), annule le trinôme (7) quand $x = z$, si, posant encore

$$(17) \qquad \frac{h\sqrt{2}}{m+n} = \operatorname{tang}\Gamma, \quad \frac{h\sqrt{2}}{m-n} = \operatorname{tang}\Gamma',$$

on introduit les dernières relations

$$(18) \quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mu - \nu = i''\pi + 2\Gamma, \\ &\mathfrak{M} - \mathfrak{N} + \mu + \nu = j''\pi + 2\Gamma', \\ &\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \cos i''\pi = \cos j''\pi, \end{aligned}\right.$$

où i'' et j'', nombres entiers, ont même parité.

§ CXCVII.

ÉQUATIONS AUX PARAMÈTRES ET AUGMENTS.

Les trois groupes (12), (15), (18), se concentrent dans le suivant

$$
(19)\quad \left\{ \begin{array}{ll}
\mathcal{M} + \mu = i''\pi + \Gamma + \Gamma', & \mathcal{M} - \mu = \mathcal{B} - \mathcal{B}', \\
\mathcal{N} + \nu = i\pi + \mathcal{A} + \mathcal{A}', & \mathcal{N} - \nu = \Gamma - \Gamma', \\
\mathcal{P} + \rho = i'\pi + \mathcal{B} + \mathcal{B}', & \mathcal{P} - \rho = \mathcal{A} - \mathcal{A}', \\
\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}} = \cos i\pi, \quad \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = \cos i'\pi, & \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \cos i''\pi,
\end{array} \right.
$$

lorsqu'on admet que les entiers i et j soient égaux, que $j' = i'$, que $j'' = i''$; restrictions qui n'altèrent pas la généralité de la fonction U cherchée. En effet, les paramètres (m, n, p) sont les seules quantités qui particularisent cette fonction et la constante θ^2 (5); d'eux seuls dépendent les augments $(\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \Gamma, \mathcal{A}', \mathcal{B}', \Gamma')$, et les arcs $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P})$. Quant aux arcs complémentaires $(\mu, \nu, \rho,)$, leur grandeur est en quelque sorte disponible; car, sans altérer en rien U, ni θ^2, on peut ajouter ou retrancher aux (μ, ν, ρ) des multiples quelconques de 2π, et même de π en changeant, s'il est nécessaire, les signes des coefficients (M, N, P). On peut donc choisir ces multiples de telle sorte, que les différences $(\mathcal{M} - \mu)$, $(\mathcal{N} - \nu)$, $(\mathcal{P} - \rho)$ soient moindres que π en valeur absolue, et poser conséquemment les relations (19).

Mais, les entiers (i, i', i''), qui restent seuls, ne sont pas complétement indépendants, car les dernières équations (19), qui assignent les rapports des coefficients (M, N, P), donnent, par leur produit

$$
(20)\qquad 1 = \cos i\pi \cos i'\pi \cos i''\pi = \cos(i + i' + i'')\pi,
$$

il faut donc, essentiellement, que la somme $(i + i' + i'')$ soit paire. Ce qui exige, ou que les trois entiers (i, i', i'') soient tous pairs, ou qu'un seul soit pair et les deux autres impairs. Dans le premier cas, les coefficients sont égaux et de même signe; dans le second, ils sont encore égaux en valeur absolue, mais l'un d'eux a un signe différent de celui des deux autres : car, d'après la dernière ligne (19), avec (i, i', i'') tous pairs on a $(P = N = M)$ avec i seul pair $(P = N = -M)$, avec i' seul pair $(P = -N = M)$, enfin avec i'' seul pair $(-P = N = M)$.

§ CXCVIII.

RÉSUMÉ DE LA SOLUTION.

Lorsqu'on substitue aux $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ leurs valeurs (5), et qu'on représente par les lettres $(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathcal{B}}, \dot{\Gamma}$, surmontées d'un point, les sommes $(i\pi + \mathcal{A}, i'\pi + \mathcal{B}, i''\pi + \Gamma)$, les six premières relations (19) donnent séparément

$$(21)\quad \begin{cases} ma = \alpha + \dfrac{\dot{\Gamma} + \mathcal{B} + \Gamma' - \mathcal{B}'}{2}, \\ na = \beta + \dfrac{\dot{\mathcal{A}} + \Gamma + \mathcal{A}' - \Gamma'}{2}, \\ pa = \gamma + \dfrac{\dot{\mathcal{B}} + \mathcal{A} + \mathcal{B}' - \mathcal{A}'}{2}, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\dot{\Gamma} - \mathcal{B} + \Gamma' + \mathcal{B}'}{2}, \\ \nu = \dfrac{\dot{\mathcal{A}} - \Gamma + \mathcal{A}' + \Gamma'}{2}, \\ \rho = \dfrac{\dot{\mathcal{B}} - \mathcal{A} + \mathcal{B}' + \mathcal{A}'}{2}. \end{cases}$$

Il résulte des équations (21) qu'à chaque groupe des en-

tiers (i, i', i''), correspond un groupe unique de paramètres (m, n, p), que l'on peut déterminer approximativement, par la méthode des substitutions successives, à l'aide des relations (5) en (α, β, γ), (10), (14), et (17) en $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \Gamma, \mathcal{A}', \mathcal{B}', \Gamma')$. Et, quand ces derniers augments sont connus, les équations (22) donnent les arcs (μ, ν, ρ) correspondants.

Il est à remarquer que deux des paramètres ne peuvent pas être égaux. En effet, avec $n = p$, on a

$$\mathcal{B} = \gamma, \quad \mathcal{N} = \mathcal{P}, \quad \mathcal{A}' = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{B} = \Gamma, \quad \mathcal{B}' = -\Gamma',$$

d'après les relations citées, et les équations (22) donnent

$$\mu = \frac{i''\pi}{2}, \quad \nu + \rho = \frac{i + i' + 1}{2}\pi;$$

de plus les seconds membres des deux dernières (21) se composent d'une partie commune, augmentée de $\left(\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ pour na, de $\left(\frac{i'\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ pour pa ; il faut donc que l'entier i' soit égal à $i + 1$; alors

$$\nu + \rho = (i + 1)\pi;$$

et la somme $(i + i' + i'')$, qui doit être paire, devenant $(2i + 1 + i'')$, l'entier i'' est nécessairement impair. De là résulte que, dans U (6), la somme des deux premiers termes s'annule par le facteur $\cos \mu$, ou $\cos \frac{i''\pi}{2}$; et que la somme des quatre autres termes s'annule pareillement, soit par le facteur $\cos \frac{\nu + \rho}{2}$ ou $\cos \frac{i + 1}{2}\pi$, si i est pair d'où $N = P$ (19), soit par le facteur $\sin \frac{\nu + \rho}{2}$, ou $\sin \frac{i + 1}{2}\pi$, si i est impair d'où $N = -P$. Ainsi $U = 0$.

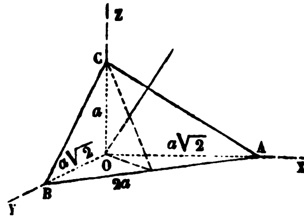
Composée avec tous les termes simples (3), maintenant reconnus, et ayant chacun un seul coefficient, qui sera déterminé à l'aide de la méthode d'élimination du § LIX, la fonction intégrale V exprimera la température variable du polyèdre dans le premier cas, celui où l'état initial apporte une cosymétrie calorifique directe. On reconnaîtra de la même manière tous les termes simples correspondants au second cas. Il est donc bien vrai que la loi du refroidissement par rayonnement du tétraèdre, sixième partie du cube, s'exprime par une série trigonométrique, où les variables n'entrent pas sous des intégrales définies. Et c'est là tout ce que nous voulions constater.

§ CXCIX.

RAYONNEMENT DU TÉTRAÈDRE $\frac{1}{24}$.

Afin de savoir s'il en est de même du second tétraèdre, vingt-quatrième du cube, prenons son angle trièdre trirectangle pour celui des coordonnées positives, en posant

Fig. 37.



la plus petite arête, $\overline{OC} = a$, sur l'axe des z, et les deux arêtes, $\overline{OA} = \overline{OB} = a\sqrt{2}$, sur les axes des x et des y. Les quatre faces auront pour équations

$$(23) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y + x = \sqrt{2}\,(a - z).$$

Les conductibilités extérieures étant, h pour les deux premières faces qui sont géométriquement similaires, l pour la troisième, h_1 pour la quatrième, dans le terme simple (3), la fonction U et la constante θ^2, devront maintenant vérifier le groupe

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}+\dfrac{d^2U}{dz^2}+\theta^2U=0,\\ \left(\dfrac{dU}{dx}-hU\right)_{x=0}=0,\quad \left(\dfrac{dU}{dy}-hU\right)_{y=0}=0,\\ \left(\dfrac{dU}{dz}-lU\right)_{z=0}=0,\\ \left(\dfrac{dU}{dx}+\dfrac{dU}{dy}+\sqrt{2}\,\dfrac{dU}{dz}+2h_1U\right)_{\sigma}=0; \end{array}\right.$$

car la normale extérieure est dirigée parallèlement aux coordonnées négatives, pour les trois premières faces ; et, pour la quatrième, désignée par l'indice σ, cette normale fait, avec les axes, les angles aux cosinus $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

§ CC.

FORME DU TERME SIMPLE.

Avec trois paramètres quelconques (m, n, p), et les neuf arcs, moindres que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, qui s'en déduisent à l'aide des relations

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{h\sqrt{2}}{n+p}=\operatorname{tang}\mathcal{A}, & \dfrac{h\sqrt{2}}{p+m}=\operatorname{tang}\mathcal{B}, & \dfrac{h\sqrt{2}}{m+n}=\operatorname{tang}\Gamma,\\ \dfrac{h\sqrt{2}}{n-p}=\operatorname{tang}\mathcal{A}', & \dfrac{h\sqrt{2}}{p-m}=\operatorname{tang}\mathcal{B}', & \dfrac{h\sqrt{2}}{m-n}=\operatorname{tang}\Gamma',\\ \dfrac{l}{m}=\operatorname{tang}\alpha, & \dfrac{l}{n}=\operatorname{tang}\beta, & \dfrac{l}{p}=\operatorname{tang}\gamma, \end{array}\right.$$

on obtient une fonction U et une constante θ^2 qui satisfont aux quatre premières conditions (24), en prenant

$$(26)\quad U = \left\{ \begin{aligned} & M\cos(mz-\alpha)\left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{n+p}{\sqrt{2}}y-\mathcal{A}\right)\cos\left(\frac{n-p}{\sqrt{2}}x-\mathcal{A}'\right) \\ & +\cos\left(\frac{n-p}{\sqrt{2}}y-\mathcal{A}'\right)\cos\left(\frac{n+p}{\sqrt{2}}x-\mathcal{A}\right) \end{aligned} \right\} \\ & +N\cos(nz-\beta)\left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{p+m}{\sqrt{2}}y-\mathcal{B}\right)\cos\left(\frac{p-m}{\sqrt{2}}x-\mathcal{B}'\right) \\ & +\cos\left(\frac{p-m}{\sqrt{2}}y-\mathcal{B}'\right)\cos\left(\frac{p+m}{\sqrt{2}}x-\mathcal{B}\right) \end{aligned} \right\} \\ & +P\cos(pz-\gamma)\left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{m+n}{\sqrt{2}}y-\Gamma\right)\cos\left(\frac{m-n}{\sqrt{2}}x-\Gamma'\right) \\ & +\cos\left(\frac{m-n}{\sqrt{2}}y-\Gamma'\right)\cos\left(\frac{m+n}{\sqrt{2}}x-\Gamma\right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

où les coefficients (M, N, P) sont constants et indéterminés.

En effet, d'abord, les six termes de U (26) vérifient successivement la première (24), avec le même θ^2 aux formes diverses,

$$(27)\quad \left. \begin{aligned} & m^2+\left(\frac{n+p}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{n-p}{\sqrt{2}}\right)^2= \\ & n^2+\left(\frac{p+m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{p-m}{\sqrt{2}}\right)^2= \\ & p^2+\left(\frac{m+n}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m-n}{\sqrt{2}}\right)^2= \end{aligned} \right\} = m^2+n^2+p^2=\theta^2;$$

ensuite, dans chaque terme, les trois facteurs, X en x, Y en y, Z en z, sont tels que les dérivées logarithmiques $\left(\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right), \left(\frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}\right), \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}\right)$, se réduisent, les deux premières à h, la troisième à l, quand x, y, z, deviennent

zéro, par exemple :

$$\text{avec } X = \cos\left(\frac{n+p}{\sqrt{2}}x - \mathcal{A}\right), \left(\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right)_0 = \frac{n+p}{\sqrt{2}} \operatorname{tang} \mathcal{A} = h,$$

$$\text{avec } Y = \cos\left(\frac{p-m}{\sqrt{2}}y - \mathcal{B}'\right), \left(\frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}\right)_0 = \frac{p-m}{\sqrt{2}} \operatorname{tang} \mathcal{B}' = h,$$

$$\text{avec } Z = \cos(pz - \gamma), \quad \left(\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}\right)_0 = p \operatorname{tang} \gamma = l,$$

d'après la définition (25) des arcs $(\mathcal{A}, \mathcal{B}', \gamma)$; et ainsi des autres facteurs.

La fonction U (26), restant la même quand on y change y en x et x en y, est directement symétrique par rapport au plan bissecteur $y = x$; et si, dans chacune des trois parenthèses, on substituait la différence des deux termes à leur somme, cette fonction deviendrait inversement symétrique par rapport au même plan. La solution s'achevant de la même manière dans les deux cas, il suffit de traiter le premier, ou d'admettre que l'état initial apporte une symétrie calorifique directe. Il s'agit de savoir, maintenant, si les paramètres (m, n, p), et les coefficients (M, N, P) peuvent être tels, que la fonction U (26) vérifie la dernière condition (24), celle à la face inclinée σ.

§ CCI.

CONDITION DE LA FACE INCLINÉE.

La forme donnée à la fonction U facilite cette épreuve. Soit posé

$$(28) \quad \begin{cases} mz - \alpha = \zeta, & nz - \beta = \zeta', & pz - \gamma = \zeta''; \\ ma - \alpha = \mathfrak{M} & na - \beta = \mathfrak{N} & pa - \gamma = \mathfrak{P}; \end{cases}$$

l'équation (23) de la face σ, admettra les trois expressions

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{m}{\sqrt{2}}(y+x) = \mathfrak{M} - \zeta, \\ \dfrac{n}{\sqrt{2}}(y+x) = \mathfrak{N} - \zeta', \\ \dfrac{p}{\sqrt{2}}(y+x) = \mathfrak{P} - \zeta'', \end{cases}$$

et (u, u', u'') désignant les trois parenthèses (26), U sera

$$(30)\qquad U = M u \cos\zeta + N u' \cos\zeta' + P u'' \cos\zeta''.$$

On reconnaît facilement que le facteur u donne

$$(31)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} = -\frac{n+p}{\sqrt{2}}\frac{du}{d\mathfrak{A}} - \frac{n-p}{\sqrt{2}}\frac{du}{d\mathfrak{A}'},$$

et que deux transformations successives le mettent sous la forme

$$(32)\ u = \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}(y+x) - \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'\right)\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \\ + &\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}(y+x) + \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}\right)\cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \end{aligned} \right\},$$

d'où résulte qu'en passant à la face σ, à l'aide des (29), on a les deux valeurs

$$(33)\ \left\{ \begin{aligned} u_\sigma &= \left\{ \begin{aligned} &\cos(\mathfrak{N} - \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' - \zeta')\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \\ + &\cos(\mathfrak{P} + \mathfrak{A}' - \mathfrak{A} - \zeta'')\cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \end{aligned} \right\}, \\ \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\right)_\sigma &= \left\{ \begin{aligned} &-n\sqrt{2}\sin(\mathfrak{N} - \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' - \zeta')\cos\left(\frac{p}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \\ &-p\sqrt{2}\sin(\mathfrak{P} + \mathfrak{A}' - \mathfrak{A} - \zeta'')\cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \right.$$

car la première, étant substituée dans (31), conduit à la seconde. Les facteurs (u', u'') jouissent de propriétés homologues.

A l'aide de ces propriétés, la substitution de U (30) dans le polynôme

$$(34) \qquad \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} + \sqrt{2}\,\frac{dU}{dz} + 2h_1 U\right),$$

et le passage à la face σ, donnent trois fonctions trigonométriques en z seul, respectivement multipliées par

$$\left(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}(y-x),\ \cos\frac{n}{\sqrt{2}}(y-x),\ \cos\frac{p}{\sqrt{2}}(y-x)\right),$$

et qui doivent s'annuler, toutes et séparément, pour que le polynôme (34), avec l'indice σ, devienne identiquement zéro, quelle que soit la différence $(y-x)$. Mais, de plus, chacune des trois nouvelles équations doit être satisfaite quel que soit z. Ainsi, la première équation, celle qui correspond au facteur $\cos\frac{m}{\sqrt{2}}(y-x)$, se mettant aisément sous la forme . . . (35)

$$\begin{aligned}
&\cos(\zeta'-\zeta'')\left\{\begin{array}{l} \quad N\left[h_1\sqrt{2}\cos(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')-(n+p)\sin(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')\right] \\ + P\left[h_1\sqrt{2}\cos(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)-(n+p)\sin(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)\right]\end{array}\right\} \\
&+\sin(\zeta-\zeta'')\left\{\begin{array}{l} \quad N\left[-h_1\sqrt{2}\sin(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')-(n+p)\cos(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')\right] \\ + P\left[h_1\sqrt{2}\sin(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)+(n+p)\cos(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)\right]\end{array}\right\} \\
&+\cos(\zeta'-\zeta'')\left\{\begin{array}{l} \quad N\left[h_1\sqrt{2}\cos(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')+(n-p)\sin(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')\right] \\ + P\left[h_1\sqrt{2}\cos(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)-(n-p)\sin(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)\right]\end{array}\right\} \\
&+\sin(\zeta'-\zeta'')\left\{\begin{array}{l} \quad N\left[h_1\sqrt{2}\sin(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')-(n-p)\cos(\mathcal{P}-\mathcal{B}-\mathcal{B}')\right] \\ + P\left[h_1\sqrt{2}\sin(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)+(n-p)\cos(\mathcal{N}+\Gamma'-\Gamma)\right]\end{array}\right\} = 0
\end{aligned}$$

exige que les quatre parenthèses $\{\ldots\}$ soient nulles, toutes et séparément. Et les deux autres équations sont aussi exi-

geantes. Il y a donc douze relations, et cela entre six inconnues seulement : les trois paramètres (m, n, p), et les coefficients (M, N, P) ; disproportion qui semble annoncer une impossibilité.

§ CCII.

ÉQUATIONS AUX PARAMÈTRES.

Le § CXCVI nous vient en aide pour abréger notre recherche, car en suivant exactement la route qu'il a tracée, on reconnaît, sans difficulté nouvelle, qu'en posant

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{h_1\sqrt{2}}{m+n} = \operatorname{tang} \mathcal{A}_1, \ \dfrac{h_1\sqrt{2}}{p+m} = \operatorname{tang} \mathcal{B}_1, \ \dfrac{h_1\sqrt{2}}{m+n} = \operatorname{tang} \Gamma_1, \\ \dfrac{h_1\sqrt{2}}{m-n} = \operatorname{tang} \mathcal{A}'_1, \ \dfrac{h_1\sqrt{2}}{p-m} = \operatorname{tang} \mathcal{B}'_1, \ \dfrac{h_1\sqrt{2}}{m-n} = \operatorname{tang} \Gamma'_1, \end{cases}$$

les douze relations actuelles sont celles des trois groupes

$$(37)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \mathcal{N} + \mathcal{P} - \mathcal{B} - \mathcal{B}' + \Gamma' - \Gamma = i\pi + 2\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{N} - \mathcal{P} + \mathcal{B} + \mathcal{B}' + \Gamma' - \Gamma = j\pi + 2\mathcal{A}'_1 \end{array}\right\} \dfrac{P}{N} = \cos i\pi = \cos j\pi \\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{P} + \mathcal{M} - \Gamma - \Gamma' + \mathcal{A}' - \mathcal{A} = i'\pi + 2\mathcal{B}_1 \\ \mathcal{P} - \mathcal{M} + \Gamma + \Gamma' + \mathcal{A}' - \mathcal{A} = j'\pi + 2\mathcal{B}'_1 \end{array}\right\} \dfrac{M}{P} = \cos i'\pi = \cos j'\pi \\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{M} + \mathcal{N} - \mathcal{A} - \mathcal{A}' + \mathcal{B}' - \mathcal{B} = i''\pi + 2\Gamma_1 \\ \mathcal{M} - \mathcal{N} + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \mathcal{B}' - \mathcal{B} = j''\pi + 2\Gamma'_1 \end{array}\right\} \dfrac{N}{M} = \cos i''\pi = \cos j''\pi \end{cases}$$

où les entiers (i, j) ont même parité, ainsi que (i', j'), ainsi que (i'', j''), et qui exigent que les deux sommes $(i + i' + i'')$, $(j + j' + j'')$ soient paires.

D'après ces relations, U (26) n'existe plus quand deux des paramètres sont égaux. En effet, avec $m = n$, on a

$$\beta = \alpha, \ \mathcal{N} = \mathcal{M}, \ \Gamma' = \frac{\pi}{2}, \ \ \mathcal{B} = \mathcal{A}, \ \mathcal{B}' = -\mathcal{A}', \ \Gamma'_1 = \frac{\pi}{2},$$

et le troisième groupe (37) donne $j'' = -1$ par sa seconde

équation, d'où $N = -M$ d'après sa dernière. Alors, des parenthèses (26), la troisième s'annule par $\cos \Gamma'$; les deux premières sont identiques, avec le même signe, ainsi que leurs deux facteurs en z, et puisque $N = -M$, tout disparaît. Ainsi $U = 0$.

Des trois groupes (37), on déduit les doubles valeurs

$$(38)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{i'-j'}{2}\pi + \Gamma + \Gamma' + \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}'_1 = \frac{i''+j''}{2}\pi + \Gamma_1 + \Gamma'_1 + \mathcal{B} - \\ \mathfrak{N} &= \frac{i''-j''}{2}\pi + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \Gamma_1 - \Gamma'_1 = \frac{i+j}{2}\pi + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Gamma - \\ \mathfrak{P} &= \frac{i-j}{2}\pi + \mathcal{B} + \mathcal{B}' + \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}'_1 = \frac{i'+j'}{2}\pi + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1 + \mathcal{A} - \end{aligned}\right.$$

La somme des trois premières devant égaler celle des trois dernières, il en résulte

$$\mathcal{A}' - \mathcal{A}'_1 + \mathcal{B}' - \mathcal{B}'_1 + \Gamma' - \Gamma'_1 = \frac{j+j'+j''}{2}\pi$$

et $(j+j'+j'')$ étant pair, on doit avoir

$$\operatorname{tang}(\mathcal{A}' - \mathcal{A}'_1 + \mathcal{B}' - \mathcal{B}'_1 + \Gamma' - \Gamma'_1) = 0.$$

Or, si l'on évalue cette tangente d'un arc polynôme, à l'aide des tangentes des arcs simples, donnés par les secondes lignes (25) et (36), sa valeur définitive est une fraction, qui a pour numérateur

$$\frac{h-h_1}{\sqrt{2}}(m-n)(n-p)(p-m)\times$$
$$[(n-p)^2 + (p-m)^2 + (m-n)^2 + (h-h_1)^2 + 3(h+h_1)^2];$$

et, puisque ce numérateur doit être nul, et que la fonction U rentrerait dans le néant si deux des trois paramètres étaient égaux, il faut donc, essentiellement, que $h_1 = h$.

De là cette conclusion remarquable, que le refroidissement par rayonnement, du tétraèdre proposé, ne peut

s'exprimer par une série trigonométrique, où les variables n'entrent pas sous des intégrales définies, que si la face inclinée σ a la même conductibilité extérieure que les deux faces verticales et similaires ($x=0, y=0$), la face horizontale ($z=0$) ayant d'ailleurs un pouvoir émissif quelconque.

§ CCIII.

SOLUTION RESTREINTE.

Puisque $h_1 = h$, les arcs (36) sont respectivement égaux à ceux des deux premières lignes (25); et l'identité complète de chaque couple des valeurs (38), n'exige plus que celle des deux multiples correspondants de $\frac{\pi}{2}$, laquelle s'établit en prenant

$$j = i'' - i', \quad j' = i - i'', \quad j'' = i' - i.$$

Par ces valeurs, les arcs ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$) comprennent respectivement les multiples

$$\frac{i' + i'' - i}{2}\pi, \quad \frac{i'' + i - i'}{2}\pi, \quad \frac{i + i' - i''}{2}\pi,$$

qui, les trois numérateurs étant pairs, peuvent être remplacés par ceux-ci

$$I\pi, \quad I'\pi, \quad I''\pi,$$

qu'on en déduit d'ailleurs en posant

$$(39) \qquad i = I' + I'', \quad i' = I'' + I, \quad i'' = I + I',$$

comme pour satisfaire généralement à la condition que la somme $(i + i' + i'')$ soit paire. Adoptant donc les formules (39) et substituant aux ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$) leurs valeurs (28), les relations (37) et (38) sont définitivement résumées par

les suivantes :

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} ma &= \mathrm{I}\pi + \alpha + \Gamma + \Gamma' + \mathcal{B} - \mathcal{B}', \\ na &= \mathrm{I}'\pi + \beta + \mathcal{A} + \mathcal{A}' + \Gamma - \Gamma', \\ pa &= \mathrm{I}''\pi + \gamma + \mathcal{B} + \mathcal{B}' + \mathcal{A} - \mathcal{A}', \\ \mathrm{M}\cos \mathrm{I}\pi &= \mathrm{N}\cos \mathrm{I}'\pi = \mathrm{P}\cos \mathrm{I}''\pi, \end{aligned}\right.$$

où les trois multiples de π ont des parités quelconques.

Il résulte des équations (40) qu'à chaque groupe $(\mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{I}'')$ correspondent : un groupe de paramètres (m, n, p) et de neuf augments (25), une fonction U (26), une constante θ^2 (27), enfin un terme simple (3) avec un seul coefficient indéterminé. Tous les termes simples étant ainsi reconnus, les procédés généraux compléteront la solution. Il est donc prouvé que la loi intégrale du refroidissement par rayonnement du tétraèdre $\frac{1}{24}$, s'exprime aussi par une série trigonométrique, où les variables n'entrent pas sous des intégrales définies. Mais, avec la condition essentielle que la conductibilité extérieure soit la même, pour les trois faces empruntées à des plans diagonaux du cube.

S'il s'agissait de traiter le refroidissement par rayonnement du prisme triangulaire hémirégulier, qui reste seul des cinq polyèdres exceptionnels, entrevus au § CLXXXIII, il faudrait reprendre nos coordonnées $\mathrm{P}^{(i)}$, dont l'abus pourrait nous être reproché. Nous supprimerons donc cette dernière épreuve, bien qu'elle pût offrir une trace de filiation, analogue à la précédente, en exigeant, sur la plus large des faces latérales du prisme, la même conductibilité extérieure que sur la plus étroite.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE DES TEMPÉRATURES PAR RAYONNEMENT. ÉCHAUFFEMENT.

État permanent des polyèdres dont plusieurs faces rayonnent la chaleur. — Cas d'une poutre. — Cas d'un prisme rectangle. — Solution générale pour un prisme droit. — Problème de l'échauffement des corps solides. — Cas d'un mur. — Cas divers de l'échauffement d'une barre.

---

§ CCIV.

ÉTAT PERMANENT D'UNE POUTRE.

Un corps solide peut être à l'état permanent, lorsque sa surface σ comprend deux parties, l'une σ' rayonnante, l'autre σ'' où les températures, F, sont fixes et connues. La température stationnaire, que nous désignerons par U, est alors une fonction de (x, y, z), qui doit vérifier les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0,\\ &\left(\frac{dU}{dx}\cos\xi+\frac{dU}{dy}\cos\eta+\frac{dU}{dz}\cos\zeta+lU\right)_{\sigma'}=0,\\ &U_{\sigma''}=F(x, y, z)_{\sigma''}. \end{aligned}\right.$$

Indiquons, par divers exemples, comment on détermine la loi intégrale de cet état permanent.

S'il s'agit d'une poutre indéfinie, dont trois faces $(x=+a, x=-a, y=-b)$ sont rayonnantes, et ont respectivement les conductibilités extérieures (l, l', L),

tandis que la quatrième face $(y = +b)$ a des températures fixes, constantes sur une même parallèle aux arêtes, et différant suivant une loi donnée, $F(x)$, d'une parallèle à une autre; la fonction U ne dépend que de (xy), et doit vérifier le groupe

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{d^2U}{dy^2} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dx} + lU\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\dfrac{dU}{dx} - l'U\right)_{x=-a} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dy} - LU\right)_{y=-b} = 0, \quad U_{y=b} = F(x). \end{array} \right.$$

Avec le facteur X et le paramètre m, définis au § CLXXIV, le terme simple sera

$$(3)\qquad U_1 = X\mathfrak{Y},$$

si le second facteur $\mathfrak{Y}$, ne dépendant que de y, satisfait aux conditions

$$(4)\qquad \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dy^2} = m^2\mathfrak{Y}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dy} - L\mathfrak{Y}\right)_{-b} = 0, \quad \mathfrak{Y}_{+b} = 1.$$

Car, étant ainsi composé, U_1 (3) sera une intégrale particulière de l'équation générale (2), vérifiera les deux premières équations à la surface par X, la troisième par $\mathfrak{Y}$; et la fonction U prenant la forme

$$(5)\qquad U = \sum MX\mathfrak{Y},$$

d'une série étendue à tous les paramètres m, la quatrième équation à la surface, pour $y = -b$, d'où $\mathfrak{Y} = 1$, exigera l'identité

$$(6)\qquad \sum MX = F(x);$$

laquelle sera établie à l'aide du coefficient

$$(7)\qquad M = \frac{\mathcal{A}}{a}\int_{-a}^{+a} F(x)X\,dx,$$

du tableau I, § CLXXIV; car les facteurs X, en changeant de place, ont conservé leurs propriétés, énoncées à la quatrième ligne de ce tableau.

Tout se réduit donc à déterminer le facteur $\mathfrak{T}$. A cet effet, désignant par les symboles E (φ), $\mathcal{E}$ (φ), les cosinus et sinus hyperboliques d'un exposant φ, fonctions dont la définition et les propriétés essentielles sont consignées dans le tableau suivant

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} = E(\varphi), \quad \dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} = \mathcal{E}(\varphi), \\ E^2(\varphi) - \mathcal{E}^2(\varphi) = 1, \quad \mathcal{E}(0) = 0, \quad E(0) = 1, \\ \dfrac{dE(\varphi)}{d\varphi} = \mathcal{E}(\varphi), \quad \dfrac{d\mathcal{E}(\varphi)}{d\varphi} = E(\varphi), \end{array}\right.$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle (4) en $\mathfrak{T}$, et sa dérivée, peuvent être prises sous la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{T} = AE[m(b+y)] + B\mathcal{E}[m(b+y)], \\ \dfrac{d\mathfrak{T}}{dx} = mBE[m(b+y)] + mA\mathcal{E}[m(b+y)]. \end{array}\right.$$

A et B étant deux constantes arbitraires. Avec ces valeurs (9), la vérification de la seconde (4) exige que $mB = LA$. Prenant donc $B = CL$, $A = Cm$, le facteur $\mathfrak{T}$ (9) ne contiendra plus que la nouvelle constante C, qui déterminée par la dernière condition (4), donnera définitivement

$$(10)\qquad \mathfrak{T} = \frac{mE[m(b+y)] + L\mathcal{E}[m(b+y)]}{mE(2mb) + L\mathcal{E}(2mb)}.$$

Avec cette valeur (10) du facteur $\mathfrak{T}$, et celle (7) du coefficient M, la série (5) exprimera les températures

stationnaires, par rayonnement, de la poutre; quelles que soientd'ailleurs les trois conductibilités extérieures (l, l', L), qui peuvent avoir, sucessivement et séparément, toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini.

§ CCV.

ÉTAT PERMANENT D'UN PRISME RECTANGLE.

S'il s'agit d'un prisme rectangle, dont cinq faces $(x = +a,\ x = -a, y = +b, y = -b, z = -c)$ sont rayonnantes, et ont respectivement les conductibilités extérieures $(l,\ l',\ h,\ h',\ L)$, tandis que la sixième face $(z = +c)$ a des températures fixes et connues $F(x, y)$; la fonction U est régie par les équations

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{d^2U}{dy^2} + \dfrac{d^2U}{dz^2} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dx} + lU\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\dfrac{dU}{dx} - l'U\right)_{x=-a} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dy} + hU\right)_{y=b} = 0, \quad \left(\dfrac{dU}{dy} - h'U\right)_{y=-b} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dz} - LU\right)_{z=-c} = 0, \quad U_{z=c} = F(x, y). \end{cases}$$

Avec les facteurs X, Y, et les paramètres m, n, définis au § CLXXIV, le terme simple sera

$$(12)\qquad U_1 = XY\mathfrak{Z},$$

le troisième facteur $\mathfrak{Z}$, qui ne dépend que de z, satisfaisant aux conditions

$$(13)\quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dz^2} = (m^2 + n^2)\mathfrak{Z}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz} - L\mathfrak{Z}\right)_{-c} = 0, \quad \mathfrak{Z}_{+c} = 1.$$

Car, ainsi composé, U_1 (12) sera une intégrale particu-

lière de l'équation générale (11), vérifiera les deux premières équations à la surface par X, la troisième et la quatrième par Y, la cinquième par $\mathcal{Z}$. Posant pour simplifier,

$$(14) \qquad m^2 + n^2 = r^2,$$

on obtient, de la même manière que $\mathcal{J}$ (10), la valeur homologue

$$(15) \qquad \mathcal{Z} = \frac{r\mathrm{E}[r(c+z)] + \mathrm{L}\mathcal{E}[r(c+z)]}{r\mathrm{E}(2rc) + \mathrm{L}\mathcal{E}(2rc)},$$

qui satisfait aux conditions (13).

La fonction intégrale U étant prise sous la forme

$$(16) \qquad \mathrm{U} = \sum \mathrm{MXY}\mathcal{Z}$$

d'une double série étendue à tous les facteurs X, Y, la sixième équation à la surface (11), pour $z = +c$, d'où $\mathcal{Z} = 1$, exigera l'identité

$$(17) \qquad \sum \mathrm{MXY} = \mathrm{F}(x, y),$$

laquelle sera établie à l'aide du coefficient

$$(18) \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathcal{M}}{ab}\int_{-b}^{+b} dy \int_{-a}^{+a} \mathrm{F}(x, y)\mathrm{XY}\, dx\, dy,$$

qui n'est autre que celui (16), § CLXXV, écrit avec F au lieu de f; car les facteurs X et Y, tout en changeant de place, ont conservé leurs propriétés, énoncées aux deux dernières lignes des tableaux I et II du § CLXXIV. Avec la valeur (18) du coefficient M, et celle (15) du facteur $\mathcal{Z}$, la double série (16) exprimera les températures stationnaires, par rayonnement, du prisme rectangle; quelles que soient d'ailleurs les cinq conductibilités extérieures (l, l', h, h', L).

§ CCVI.

CAS GÉNÉRAL D'UN PRISME DROIT.

Lors de l'équilibre des températures de tout prisme droit, qui rayonne la chaleur par ses faces latérales et par l'une de ses deux bases ($z = -c$), tandis que la seconde ($z = +c$) est entretenue à des températures fixes $F(x, y)$; la fonction U de (x, y, z) est régie par les équations

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{d^2U}{dy^2} + \dfrac{d^2U}{dz^2} = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dx}\cos\xi + \dfrac{dU}{dy}\cos\eta + lU\right)_\omega = 0, \\ \left(\dfrac{dU}{dz} - LU\right)_{z=-c} = 0, \quad U_{z=c} = F(x, y), \end{array} \right.$$

la normale extérieure étant perpendiculaire à l'axe, en tout point de la paroi latérale, dont le périmètre est ω.

Pour vérifier, tous et séparément, les conditions (19), moins la dernière, les termes simples ont la forme

$$(20)\qquad U_1 = u\mathfrak{Z};$$

le facteur $\mathfrak{Z}$, fonction de z seul, satisfaisant au groupe partiel

$$(21)\quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dz^2} = \theta^2 \mathfrak{Z}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz} - L\mathfrak{Z}\right)_{-c} = 0, \quad \mathfrak{Z}_{+c} = 1,$$

et le facteur u, fonction de (x, y), vérifiant celui-ci

$$(22)\quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \theta^2 u = 0, \quad \left(\frac{du}{dx}\cos\xi + \frac{du}{dy}\cos\eta + lu\right)_\omega = 0.$$

La constante θ^2, qui doit être la même dans les deux groupes, particularise le terme simple (20). Les conditions (21) reproduisant celles (13), le facteur $\mathfrak{Z}$ aura toujours l'expres-

sion intégrale (15), écrite avec θ au lieu de r. Quant aux valeurs admissibles de la constante θ^2, et aux fonctions u qui leur correspondent, elles changent avec la forme de la base, qu'il faut conséquemment spécifier pour les obtenir.

Lorsque, pour une base donnée, on a reconnu tous les couples (θ^2, u) qui vérifient les conditions (22), la fonction intégrale U est la somme

$$(23) \qquad \mathrm{U} = \mathbf{S}\, \mathrm{M}\, u\, \mathfrak{Z},$$

de tous les termes simples admissibles (20), respectivement multipliés par autant de coefficients M, constants et indéterminés. Pour que cette somme satisfasse à la dernière condition (19), pour $z = +c$, d'où $\mathfrak{Z} = 1$, il faut que l'on ait

$$(24) \qquad \mathrm{U} = \mathbf{S}\, \mathrm{M}\, u = \mathrm{F}(x, y),$$

c'est-à-dire qu'en substituant aux variables (x, y), dans le premier membre de (24), les coordonnées d'un point intérieur de la base σ, où $(z = +c)$, il faut que ce premier membre reproduise numériquement la température F, fixe et connue, qui appartient à ce point.

Ce problème d'interpolation, analogue à celui de l'état initial lors du refroidissement, se résoudra de la même manière, si la double intégration de $uu'd\sigma$, étendue à l'aire σ de la base, est nulle quand u et u' sont différents. Or, cette propriété des facteurs u (22), résulte du théorème démontré au § LVIII, car on parvient aisément à transformer l'analogie précédente en une véritable identité. En effet, si, comme au § CLXXXIII, il s'agit d'exprimer la loi du refroidissement d'un prisme indéfini, de section σ, de périmètre ω, de pouvoir rayonnant latéral l, lorsque l'état initial, constant sur une même parallèle à l'axe, pris pour celui

des z, est F (x,y), la fonction intégrale V de (x,y,t) sera

$$(25) \qquad V = \mathbf{S}\, M u e^{-\theta^2 \frac{t}{k}},$$

le facteur u, et la constante θ^2, vérifiant essentiellement le même groupe (22), et la reproduction de l'état initial F, pour $t = 0$, exigera le même développement (24). Donc, puisque le théorème général cité s'applique à toute question de refroidissement, on a

$$(26) \qquad \int_\sigma d\sigma . u u' = 0,$$

quand u et u' sont différents, ou correspondent à des constantes différentes θ^2 et θ'^2.

D'après ce théorème particulier, on isole chaque coefficient M, dans l'équation à interpoler (24), en la multipliant par le produit de l'aire élémentaire $d\sigma$ et du facteur u, puis intégrant dans toute l'étendue de la base ; d'où

$$(27) \qquad M = \frac{\int_\sigma d\sigma . F u}{\int_\sigma d\sigma . u^2}.$$

Et, ce coefficient, qui détermine l'état variable V (25), donne aussi l'état stationnaire U (23). En un mot, il suffit de remplacer, dans la première série, l'exponentielle $e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}$, par $\mathfrak{Z}$ (15) avec θ au lieu de r, pour en déduire la seconde.

Ainsi, de la série V_x, tableau I, § CLXXIV, qui exprime le refroidissement d'un mur aux faces $(x = + a, x = - a)$, on déduira, en remplaçant l'exponentielle en t, par le facteur $\mathfrak{T}$ (10), la série (5) qui exprime l'équilibre des températures dans la poutre définie au § CCIV. Et, de la dou-

ble série (4), § CLXXV, qui exprime le refroidissement d'une poutre rayonnant inégalement par ses quatre faces, on déduira, en remplaçant l'exponentielle par le facteur $\mathcal{Z}$ (15), la série (16) qui exprime l'état stationnaire du prisme rectangle défini au § CCV.

§ CCVII.

CAS DES PRISMES TRIANGULAIRES.

Pour obtenir, de la même manière, la loi de l'équilibre des températures dans le prisme triangulaire à base rectangle isocèle, lorsque ses faces latérales, ayant les mêmes conductibilités extérieures (l, h) qu'au § CLXXXIV, une de ses bases $(z = -c)$ rayonne avec la conductibilité L, tandis que la seconde base est entretenue à des températures fixes et connues $F(x, y)$; on exprime d'abord le refroidissement du prisme indéfini de même base et de mêmes pouvoirs rayonnants latéraux, lorsque son état initial, constant sur une même parallèle à l'axe, est $F(x, y)$, ce qui donnera pour la fonction V (25) de (x, y, t)

$$(28) \qquad V = \sum M_1 u_1 e^{-\theta \frac{t}{k}} + \sum M_2 u_2 e^{-\theta^2 \frac{t}{k}}$$

avec les fonctions (u_1, u_2), aux paramètres (m, n) et la constante θ^2, définies et étudiées aux §§ CLXXXIV, CLXXXV, CLXXXVI. Et l'identification

$$\sum M_1 u_1 + \sum M_2 u_2 = F(x, y)$$

à établir, par interpolation, pour que V (28) reproduise l'état initial, conduira au coefficient (27), en (M_1, u_1); en (M_2, u_2); le symbole $\int_\sigma$ étant remplacé par la double intégration (20),

§ CLXXXVII. Cela fait, si l'on substitue, dans les doubles séries (28), aux exponentielles, les facteurs $\mathfrak{Z}$ (15), où r a la même signification que θ, la fonction

$$(29) \qquad U = \sum M_1 u_1 \mathfrak{Z} + \sum M_2 u_2 \mathfrak{Z},$$

de (x, y, z) exprimera l'état stationnaire cherché.

Pareillement, on exprime, sans difficulté nouvelle, le refroidissement d'un prisme triangulaire, régulier et indéfini, dont les faces latérales sont similaires, lorsque l'état initial $F(x, y)$, constant sur toute parallèle à l'axe, est directement symétrique par rapport aux trois plans bissecteurs. La fonction V de (x, y, t) est alors

$$(30) \qquad V = \sum M_1 u_1 e^{-\theta^2 \frac{t}{k}} + \sum NW e^{-\left(\frac{2\mu}{r}\right)^2 \frac{t}{k}},$$

à l'aide des facteurs (u_1, W), aux paramètres (λ, μ, ν), et de la constante θ^2, définis et étudiés dans la seconde partie de la XIXe Leçon. Les coefficients (27), en (M_1, u_1), en (N, W), avec le symbole (47), § CXCI, établissent le développement

$$\sum M_1 u_1 + \sum NW = F(x, y),$$

nécessaire pour que V (30) reproduise l'état initial. Cela fait, en substituant, dans les séries (30), aux exponentielles, les facteurs correspondants $\mathfrak{Z}$ (15), dans lesquels r sera remplacé par θ, par $\frac{2\mu}{r}$, on aura la fonction

$$(31) \qquad U = \sum M_1 u_1 \mathfrak{Z} + \sum NW \mathfrak{Z},$$

de (x, y, z), pour exprimer l'équilibre des températures du prisme triangulaire régulier, rayonnant avec les conductibilités extérieures, h par sa paroi latérale, L par l'une

de ses deux bases, tandis que sa seconde base est entretenue à des températures fixes, directement symétriques par rapport aux trois médianes.

Particulièrement, si F est une température constante, que l'on prend pour unité, le numérateur du coefficient (27) en (M_1, u_1) s'annule, comme il est démontré au § CXCII; le coefficient (27) en (N, W) a pour valeur le rapport de deux intégrales définies doubles, évalué au § CXCIII; l'état stationnaire U (31), réduit à sa seconde partie, est simplement

$$(32) \qquad U = 2\sum \frac{\sin\psi}{\lambda(\varphi) + \lambda(\varphi)} W \mathfrak{Z},$$

et reproduit la température 1, pour tous les points de la base chaude, puisque, en y faisant $z = +c$, d'où $\mathfrak{Z} = 1$, on retombe sur le développement (59), § CXCIII, aussi rigoureusement établi que toute autre série classique.

§ CCVIII.

VÉRIFICATION. — FLUX COMPENSÉS.

Revenons au cas général. Pour que la fonction U (23) exprime un état permanent, ou stationnaire, il faut que la quantité de chaleur que le prisme reçoit par sa base ($z = +c$), dans l'unité de temps, soit précisément égale à la somme des deux quantités de chaleur qui s'écoulent, dans le même temps, par la seconde base, et par la paroi latérale. Or, de ces trois flux, le prêmier, celui reçu, a pour expression

$$q \mathbf{S} M \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)_{+c} \int_\sigma d\sigma . u,$$

le second, rayonné par l'autre base avec le pouvoir émissif

Lq, est

$$q \sum \mathrm{ML}\,\mathfrak{Z}_{-c} \cdot \int_\sigma d\sigma . u,$$

et le troisième, rayonné par la paroi avec le pouvoir émissif ql, est

$$q \sum \mathrm{M} \int_{-c}^{+c} \mathfrak{Z}\, dz \int_\omega d\omega . lu_\omega .$$

Il faut donc que l'on ait identiquement

$$q \sum \mathrm{M} \left\{ \left[\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right)_{+c} - \mathrm{L}\,\mathfrak{Z}_{-c} \right] \int_\sigma d\sigma . u - \int_{-c}^{+c} \mathfrak{Z}\, dz . \int_\omega d\omega . lu_\omega \right\} = 0,$$

ou bien, puisque le groupe (21) donne successivement

$$\theta^2 \int_{-c}^{+c} \mathfrak{Z}\, dz = \int_{-c}^{+c} \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dz^2}\, dz = \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right)_{+c} - \mathrm{L}\,\mathfrak{Z}_{-c},$$

et que l'on peut remplacer le binôme final par la première intégrale, plus simplement

$$(34) \qquad \sum \mathrm{M} \int_{-c}^{+c} \mathfrak{Z}\, dz \left(\theta^n \int_\sigma d\sigma . - \int_\omega d\omega . lu_\omega \right) = 0.$$

Cette équation (34), devant être satisfaite lors même que la fonction F serait un simple facteur u, exige que chacun des termes de la série soit séparément nul. On a donc nécessairement

$$(35) \qquad \theta^2 \int_\sigma d\sigma . u = \int_\omega d\omega . lu_\omega .$$

Relation évidente, ou déjà reconnue, car elle n'est autre que l'équation (37) établie au § CLXXXII. Ainsi, la même propriété analytique des facteurs u (22), vérifie les solutions trouvées pour exprimer intégralement, soit l'état va-

riable, soit l'état permanent, par rayonnement, d'un prisme droit. Il n'y a que son interprétation physique qui change, car l'équation (35) dit, actuellement, que le gain de chaleur provenant des sources à températures constantes, est constamment égal à la perte due au rayonnement

§ CCIX.

PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'ÉCHAUFFEMENT.

Il résulte des §§ CCVI et CCVII que l'état stationnaire d'un prisme, dont plusieurs faces sont rayonnantes, se traite analytiquement à l'aide des fonctions introduites pour exprimer son refroidissement. C'est-à-dire qu'une question sur l'équilibre des températures, en présuppose une autre sur leurs variations. Mais, l'inverse a souvent lieu, car l'état variable, considéré dans toute sa généralité, nécessite la détermination préalable de l'état permanent vers lequel il converge. Cette nécessité se présente, dès l'abord, quand on se propose d'étudier les lois de l'échauffement.

En effet, le problème général de l'échauffement des corps solides, diffère de celui de leur refroidissement, en ce que la fonction V doit s'approcher asymptotiquement, non plus de la température zéro d'un bain ou d'une enceinte, mais d'un certain état d'équilibre, défini par les circonstances calorifiques ambiantes. Alors, U désignant la fonction de (x, y, z) qui exprime cet état stationnaire, et la surface du corps comprenant deux parties, l'une σ' rayonnante, l'autre σ'' où les températures F sont fixes et connues, la fonction V de (x, y, z, t) est régie par le groupe

total

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=k\frac{dV}{dt},\\ &\left(\frac{dV}{dx}\cos\xi+\frac{dV}{dy}\cos\eta+\frac{dV}{dz}\cos\zeta+lV\right)_{\sigma'}=0,\\ &V_{\sigma''}=F,\quad V_{t=0}=f,\quad V_{t=\infty}=U,\end{aligned}\right.$$

comprenant l'équation générale, les équations à la surface, celle de l'état initial, et celle de l'état final. Mais la fonction U n'est pas quelconque, elle doit vérifier le groupe partiel

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0,\quad U_{\sigma''}=F,\\ &\left(\frac{dU}{dx}\cos\xi+\frac{dU}{dy}\cos\eta+\frac{dU}{dz}\cos\zeta+lU\right)_{\sigma'}=0.\end{aligned}\right.$$

Or, pour résoudre ce nouveau problème, on substitue à V, dans le premier groupe

$$(38)\qquad V=U+W,$$

et, d'après le second, la nouvelle fonction W de (x, y, z, t) se trouve régie par les équations

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{d^2W}{dy^2}+\frac{d^2W}{dz^2}=k\frac{dW}{dt},\\ &\left(\frac{dW}{dx}\cos\xi+\frac{dW}{dy}\cos\eta+\frac{dW}{dz}\cos\zeta+lW\right)_{\sigma'}=0,\\ &W_{\sigma''}=0,\quad W_{t=0}=f-U,\quad W_{t=\infty}=0,\end{aligned}\right.$$

et n'est autre que celle qui exprime le refroidissement du même corps, par le rayonnement de σ', lorsque σ'' a la température fixe zéro, et que l'état initial est $(f-U)$, ou seulement $(-U)$, si $f=0$. Donc, il faut déterminer, d'abord U (37), puis W (39), pour obtenir V (38).

§ CCX.

ÉCHAUFFEMENT D'UN MUR.

Par exemple, s'il s'agit d'un mur indéfini, ayant primitivement, dans toute son étendue, la température zéro, que l'on maintient sur la face $x = a$, tandis que l'on entretient la seconde face $x = 0$, à une température plus élevée, prise pour unité, les conditions (37) et (39) sont

$$(40)\ \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} = 0, \quad U_{x=a} = 0, \quad U_{x=0} = 1, \\ \dfrac{d^2W}{dx^2} = k\dfrac{dW}{dt}, \quad W_{x=a} = 0, \quad W_{x=0} = 0, \quad W_{t=0} = -U. \end{cases}$$

On trouve immédiatement pour l'état final

$$(41) \qquad U = 1 - \frac{x}{a},$$

puis, avec les entiers i, la fonction W a la forme

$$(42) \qquad W = \sum M e^{-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \frac{t}{k}} \sin i\pi \frac{x}{a},$$

et son état initial, pour $t = 0$, devant être égal à $(-U)$ il faut identifier l'équation

$$\sum M \sin i\pi \frac{x}{a} = \frac{x - a}{a}.$$

L'isolement du coefficient M s'obtient, à l'aide du facteur $\sin i\pi \frac{x}{a} dx$, et de l'intégration depuis zéro jusqu'à a ; ce qui donne

$$M \int_0^{+a} \sin^2 \frac{i\pi}{a} x dx = \int_0^a \frac{x - a}{a} \sin \frac{i\pi}{a} x dx = -\frac{a}{i\pi},$$

et, l'intégrale du premier membre étant $\frac{a}{2}$, on a

$$M = -\frac{2}{i\pi}. \tag{43}$$

Cette valeur (43) du coefficient M étant substituée dans W (42), puis W et U (41) dans V (38), la loi de l'échauffement du mur est exprimée par la fonction

$$V = 1 - \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum \frac{\sin i\pi \frac{x}{a}}{i} e^{-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \frac{t}{k}}, \tag{44}$$

qui s'annule quand $t = 0$, d'après la série connue

$$\sum \frac{\sin i\pi \frac{x}{a}}{i} = \frac{\pi(a-x)}{2a},$$

et qui converge vers l'état permanent (41), pour les grandes valeurs de t.

§ CCXI.

ÉTAT VARIABLE D'UNE BARRE.

Le prisme solide, connu des géomètres sous le nom de *la barre*, donne lieu à plusieurs questions intéressantes sur l'échauffement. La surface latérale de ce prisme rayonne vers une enceinte à zéro; sa base σ est assez petite pour qu'on puisse admettre, qu'à toute époque, tous les points d'une même section parallèle à σ ont la même température, lorsque les deux extrémités sont entretenues à des températures fixes, ou que, l'une d'elles étant seule dans ce cas, la seconde est rayonnante. L'axe du prisme étant pris pour celui des x, la fonction V de (x, t), qui exprime l'état variable de la barre, est régie par une équation aux diffé-

rences partielles d'une forme spéciale, que l'on établit comme il suit.

L'aire de la section droite étant σ, soit p son périmètre, ε le pouvoir émissif de la paroi latérale, q la conductibilité intérieure, C le calorique spécifique, et D la densité du solide. La couche σdx, comprise entre deux sections infiniment voisines, et dont la température actuelle est V, reçoit par une de ses faces, dans le temps dt, une quantité de chaleur égale à

$$q\left(-\frac{dV}{dx}\right)\sigma\,dt,$$

dont une première partie

$$q\left(-\frac{dV}{dx}-\frac{d^2V}{dx^2}dx\right)\sigma\,dt$$

sort par l'autre face, et une seconde

$$\varepsilon V p\,dx\,dt$$

se perd par le rayonnement latéral; ce qui reste, échauffant la couche, a pour expression

$$\frac{dV}{dt}dt.\mathrm{CD}\sigma\,dx.$$

Égalant à ce quatrième terme, l'excès du premier sur les deux autres, réduisant, divisant par $q\sigma\,dx\,dt$, introduisant le rapport $k=\frac{\mathrm{CD}}{q}$, et posant

$$(45)\qquad \frac{p}{\sigma}\cdot\frac{\varepsilon}{q}=\frac{1}{b^2},$$

on arrive à l'équation cherchée,

$$(46)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}=k\frac{dV}{dt}+\frac{V}{b^2}.$$

D'après cette équation, la constante b est de même espèce que dx, c'est-à-dire une ligne. (Et en effet, le premier membre de (45) est le produit de la fraction $\frac{p}{\sigma}$, dont la dimension est (-1), par $\frac{\varepsilon}{q}$, ou l, dont la dimension est aussi (-1), d'après (12), § CLXV.)

§ CCXII.

ÉCHAUFFEMENT DE LA BARRE. — CAS GÉNÉRAL.

Cela posé, la barre a une longueur λ, et les plans de ses deux bases ont pour équations $(x = 0,\ x = \lambda)$. Elle a primitivement dans toute son étendue la température zéro de l'enceinte. On amène la face $(x = \lambda)$ au contact d'une source de chaleur constante, dont la température est prise pour unité, tandis que la seconde base $(x = 0)$, rayonnant vers l'enceinte, a une conductibilité extérieure l. Il s'agit de trouver la loi intégrale de l'échauffement de cette barre. La fonction V est alors régie par l'équation (46), et par le groupe

$$(47)\quad \left(\frac{dV}{dx} - lV\right)_{x=0} = 0,\ V_{x=\lambda} = 1,\ V_{t=0} = 0,\ V_{t=\infty} = U$$

comprenant, outre les conditions aux deux extrémités et l'état initial, l'équation correspondante à l'état permanent U, fonction de x seul, qui doit satisfaire au groupe partiel

$$(48)\qquad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{U}{b^2},\quad \left(\frac{dU}{dx} - lU\right)_{x=0} = 0,\quad U_{x=\lambda} = 1.$$

Si l'on substitue à V, dans l'équation générale (46), et le premier groupe (47),

$$(49)\qquad V = U + We^{-\frac{t}{kb^2}},$$

on trouve, en ayant égard au second groupe (48), que la nouvelle fonction W de (x, t) sera régie par les équations

$$(50)\quad \frac{d^2 W}{dx^2} = k\frac{dW}{dt}, \left(\frac{dW}{dx} - lW\right)_{x=0} = 0, W_{x=\lambda} = 0, W_{t=0} = -U.$$

La fonction U, obtenue par les mêmes opérations qui ont conduit à $\mathfrak{T}$ (10), est

$$(51)\qquad U = \frac{E\left(\frac{x}{b}\right) + lb\,\mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right)}{E\left(\frac{\lambda}{b}\right) + lb\,\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{b}\right)}.$$

Et, l'intégration du groupe (50) ramène la question, à celle du refroidissement, d'un mur dont l'état initial est $-U$, lorsque l'une de ses faces $(x = \lambda)$ est entretenue à zéro, et que la seconde $(x = 0)$ rayonne vers l'enceinte, ou d'un mur à faces similaires $(x = 0,\ x = 2\lambda)$ lors d'une symétrie calorifique inverse par rapport au plan moyen $(x = \lambda)$. Ainsi, par un simple transport de l'origine des x, et le changement de a en λ, les formules de la XVII[e] leçon détermineront la fonction W qui, jointe à U (51), donnera V (49). Toutefois, par la fonction déterminée $-U$, qui devra remplacer f, on sera conduit à des développements spéciaux, de fonctions exponentielles en séries de sinus et de cosinus, qui mériteraient d'être étudiés généralement, si l'on en juge par les deux cas, très-particuliers, qui vont suivre.

§ CCXIII.

CAS PARTICULIERS.

Lorsque l'extrémité $(x = 0)$ de la barre est entretenue à la température *zéro*, ou que $l = \infty$, l'état permanent

(51) devient

$$(52)\qquad U = \frac{\mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{b}\right)}.$$

La fonction W (50), devant maintenant s'annuler aux deux extrémités, prend la forme intégrale

$$(53)\qquad W = \sum M e^{-\left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{k}{i}} \sin \frac{i\pi}{\lambda} x,$$

où i est un nombre entier, et pour qu'elle reproduise $-U$, quand $t=0$, il faut établir l'identité

$$\sum M \sin \frac{i\pi}{\lambda} x = -\frac{\mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{b}\right)}.$$

A l'aide du facteur $\sin \frac{i\pi}{\lambda} x dx$, et de l'intégration entre zéro et λ, le premier membre se réduit au seul coefficient M_i, multiplié par $\frac{\lambda}{2}$, et après avoir constaté que deux intégrations-par-partie successives donnent l'intégrale indéfinie

$$\int \mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right) \sin \frac{i\pi}{\lambda} x\, dx = \frac{bE\left(\frac{x}{b}\right) \sin \frac{i\pi}{\lambda} x - \frac{i\pi}{\lambda} b^2 \mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right) \cos \frac{i\pi}{\lambda} x}{1 + \left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^2 b^2},$$

on arrive à la valeur

$$M = \frac{2}{\lambda} \frac{\frac{i\pi}{\lambda} \cos i\pi}{\left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b^2}},$$

qui, substituée dans W (53), puis W et U (52) dans V (49), conduit à la série

$$(54)\quad V = \frac{\mathcal{E}\left(\frac{x}{b}\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{b}\right)} + \frac{2}{\lambda}\sum \frac{\frac{i\pi}{\lambda}\cos i\pi \sin\frac{i\pi}{\lambda}x}{\left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{b^2}}\, e^{-\left[\left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{b^2}\right]\frac{t}{k}},$$

pour exprimer l'échauffement de la barre, ayant primitivement la température zéro, que l'on maintient à son extrémité ($x=0$), tandis que la seconde ($x=\lambda$) est en contact avec la source constante de chaleur, dont la température est prise pour unité.

Lorsqu'on adapte deux sources constantes de même température λ, aux deux extrémités ($x=-\lambda$, $x=+\lambda$) d'une barre, ayant une longueur double de la précédente, et primitivement à la température zéro, son état variable conserve, à toute époque, une symétrie calorifique directe, par rapport à la section moyenne ($x=0$), qui reste sans flux; chacune de ses moitiés s'échauffe donc comme la barre de longueur simple λ, quand l'extrémité ($x=0$) est imperméable, ou que $l=0$. Alors l'état permanent (51) devient

$$(55)\qquad U = \frac{E\left(\frac{x}{b}\right)}{E\left(\frac{\lambda}{b}\right)}.$$

Devant s'annuler pour $x=\lambda$, et sa dérivée pour $x=0$, la fonction W prend la forme intégrale

$$(56)\qquad W = \sum M e^{-\left(\frac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)^2\frac{t}{k}} \cos\frac{2j+1.\pi}{2\lambda}x,$$

j étant un nombre entier, et son état initial exige l'identité

$$\sum M \cos\frac{2j+1-\pi}{2\lambda}\,x = -\,\frac{E\left(\dfrac{x}{b}\right)}{E\left(\dfrac{\lambda}{b}\right)}.$$

Le coefficient M, déterminé, comme dans le cas précédent, à l'aide de la nouvelle intégrale indéfinie

$$\int E\left(\frac{x}{b}\right)\cos\frac{2j+1.\pi}{2\lambda}\,x\,dx$$

$$=\frac{b\,\mathcal{E}\left(\dfrac{x}{b}\right)\cos\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\,x+\left(\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)b^2\,E\left(\dfrac{x}{b}\right)\sin\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\,x}{1+\left(\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)^2.\,b^2},$$

a maintenant la valeur

$$M=-\,\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\cos j\pi}{\left(\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)^2+\dfrac{1}{b^2}},$$

qui, substituée dans W (56), puis W et U (55) dans V (49), conduit à la série

$$(57)\quad V=\frac{E\left(\dfrac{x}{b}\right)}{E\left(\dfrac{\lambda}{b}\right)}-\frac{2}{\lambda}\sum\frac{\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\cos j\pi\cos\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\,x}{\left(\dfrac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)^2+\dfrac{1}{b^2}}\,e^{-\left[\left(\frac{2j+1.\pi}{2\lambda}\right)^2+\frac{1}{b^2}\right]\frac{t}{k}}$$

pour exprimer l'échauffement de la barre, de longueur 2λ, ayant primitivement la température zéro de l'enceinte, lorsque ses deux extrémités sont en contact avec deux sources constantes, d'une même température 1.

Les deux fonctions V (54) et (57) devant reproduire

l'état initial quand $t = 0$, il en résulte les développements

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}\,\dfrac{e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}}{e^{\frac{\lambda}{b}} - e^{-\frac{\lambda}{b}}} = \dfrac{\frac{\pi}{\lambda}\sin\frac{\pi}{\lambda}x}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b^2}} - \dfrac{\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}x}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b^2}} + \ldots \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2}\,\dfrac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{e^{\frac{\lambda}{b}} + e^{-\frac{\lambda}{b}}} = \dfrac{\frac{\pi}{2\lambda}\cos\frac{\pi}{2\lambda}x}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b^2}} - \dfrac{\frac{3\pi}{2\lambda}\cos\frac{3\pi}{2\lambda}x}{\left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b^2}} + \ldots \end{cases}$$

Pour chacun d'eux, la série trigonométrique donne identiquement la même valeur que le rapport des exponentielles, tant que la variable x reste entre zéro et λ, la première limite comprise, mais pas la seconde. Cette dernière anomalie est une conséquence de l'origine même de ces séries. Car, dans la méthode d'interpolation du § CLXVIII, les $\mathfrak{N}$ valeurs données, de la fonction à développer, appartiennent aux points milieux des éléments linéaires δ, et non à leurs extrémités; le développement obtenu ne s'étend donc pas nécessairement aux limites mêmes; et si cela a lieu, pour les deux limites, ou pour une seule, cette extension est fortuite. Ainsi, dans le cas actuel, les identités (58) n'existent plus à la limite $x = \lambda$, c'est la règle; mais, elles existent à la limite $x = 0$, c'est l'exception.

§ CCXIV.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Ici se termine la tâche que nous nous étions imposée. Car l'état présent de la théorie analytique de la chaleur sera défini, aussi complétement qu'il est possible, si l'on joint, au Cours actuel, les huit dernières *Leçons sur les fonctions inverses*, qui traitent l'équilibre des températures

